D. — 9 E 2 7

Matheſ 4°97.

Matheſis pura. Arithmetica.

Syſtemata & methodi 213.

R

J. G. Prändels

Arithmetik

in's Kurze gefaßt,

und

für die allererſten Anfänger auf das Deutlichſte vorgetragen.

München, 1796.

Bey Joſeph Lentner.

Nro 1500.

Prändels Arithmetik ins Kurze gefaßt.

Imprimatur.

Sigmund Graf von Sprett,
Präsident.

München im churfürstl. Cenfür-
Collegio den 23. Dezember
1795.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Regiſtr. Fol. 184.

Christoph von Schmöger,
Oberlandesregierungs- und Censur-
Collegii-Sekretär.

Vorrede.

Auszüge oder sogenannte Kompendien größerer Lehrbücher, zumal von den Verfassern derselben selbst ausgefertiget, sind gewiß in manchem Anbetrachte sehr nützlich. Der Anfänger irgend einer Kunst oder Wissenschaft pflegt gar gerne bey dem Anblicke vielfassender Schulbücher, und dieß vorzüglich bey der Rechenkunst, den Muth zu verlieren: man muß ihm daher allererst ein kleiners Werkchen in die Hände spielen; welches aber immerhin die Beschaffenheit haben soll, daß es die Lernbegierde der aufmerksamen Jugend, anstatt zu sättigen, vielmehr reitzet, und sie anspornt, eine vollständigere Anweisung darüber zu Gesichte zu bekommen. Man wünscht auch öfters nach der Hand, wenn ein starkes Lehrbuch ganz durchstudiert ist,

Vorrede.

das daraus Erlernte, wie in einer Nußschale, beysamm zu haben, damit man es in spätern Jahren bequem nachholen könne. Manchmal hat der Schüler, der sich mit den vollendeten Vorbereitungsklassen dem gemeinen Bürgerstande widmet, ein ausführlicheres Werk nicht einmal nöthig, und ist daher gut, bloß so viel gelernt zu haben, als die Bedürfnisse seines Berufes fodern.

Ich habe hier nichts weiter zu erinnern, als daß ich den äußern Zuschnitt der mathematischen oder scientivischen Methode verlassen, und der Verständlichkeit zu liebe den erzählenden Vortrag gewählet: daß ich, so wie in meiner größern Arithmetik, alle algebraförmigen Lehrsätze und Beweise, worauf sonst die Regel Detri und reesische Regel gebaut zu werden pflegt, geflissentlich wegließ, und sie einsweilen auf Induktion gründete; weil ich aus vieljähriger Erfahrung mehr als überzeugt bin, daß man den größten Theil der kleinjugendlichen Zuhörer durch dergleichen saftlose und fürs Knabenalter unpassende Demonstrationen die Zuneigung für die Mathematik ein für allemal benimmt, und sie zu lebenslänglichen Feinden dieser göttlichen Wissenschaft macht: daß ich ferner die hinreichend erwiesnen Re-

gelu

Vorrede.

geln jedes Hauptartikels zuletzt allemal ins Kurze faßte, darüber zum Behuf des Lehrers Fragen aus: setzte, und zur Uebung neue, angemessene und sach: kenntnißvolle Exempel sammt ihren Kalkul anhängte: daß ich endlich die Handlungsrechnung ganz aus diesem kleinen Kompendium ausschloß; weil ich sie eines Theils für dieses Alter zu schwer hielt; andern Theils aber glaubte, daß von dieser Hauptanwen: dung der Arithmetik in Zukunft eben so wenige Schüler Gebrauch machen dörften, als z. B. von der Geometrie, in so fern selbe die Grundlage der praktischen Meßkunde ist.

Die hierin mit untergestreuten Beyspiele langen freylich nicht aus, einen Anfänger zum taktfesten Rechner in bürgerlichen Fällen zu bilden: aber jeder fähige Lehrer ist leicht im Stande, eine Menge ähn: licher zu entwerfen. Uebung ist und bleibt allerdings nach meinem Urtheile das einzige Mittel, bey der Jugend einen festen Grund zur Mathematik zu le: gen. Ist sie einmal bloß in mechanischer Anwen: dung der praktischen Regeln stark geworden, dann kann man ihr allemal bey aufwachender Fassungs: kraft die Gründe dieser oder jener Verfahrungsart beybringen. Knaben sind keine Männer, die die

Ge:

Vorrede.

Gewohnheit haben, nicht einen Schritt weiter zu gehen, ehe sie die völlige Ursache desselben im Voraus einsehen; sondern sie geben sich in ihren erstern Jahren allzugerne zufrieden, wenn sie bloß wissen, wie man die Sache anzugehen habe, unbekümmert, warum dieß gerade so und nicht anders geschehen müsse. Wer mehr von Knaben fodert, der überspannt die Natur, er mag sich entschuldigen, und seine Methode vertheidigen, wie er wolle.

Schriebs

München den 17ten Oktober
1795

der Verfasser.

Inhalt

der abgehandelten Artikel.

§. 1.

Seite

Grundbegriffe von Rechenkunst, Zahl und Ziffer, dann von Aussprechung und Anschreibung der Zahlen 1

§. 2.

Von den Rechnungsarten, und zwar erstens von der Addition . . . 8

§. 3.

Von der Multiplikation . . 15

§. 4.

Von der zwoten Hauptrechnungsart der Subtraktion 25

§. 5.

Von der Division . . . 31

§. 6.

Addition und Subtraktion mit Unterabtheilungsbenennungen . . . 43

§. 7.

Seite

§. 7.

Von gebrochnen Zahlen und ihren Rechnungsarten 48

§. 8.

Von der Regel Detri . . . 65

§. 9.

Von der reesischen Regel . . 91

§. 10.

Von der Gesellschaftsrechnung . . 125

§. 1.

§. 1.

Grundbegriffe von Rechenkunst, Zahl und Ziffer, dann von Aussprechung und Anschreibung der Zahlen.

Rechenkunst, oder mit ihrem griechischen Name, Arithmetik ist die gründliche Fertigkeit, aus bekannten Zahlen solche unbekannte zu finden, deren Größe oder Kleinheit völlig von selben abhängt. Zahl heißt aber jede Sammlung, jede Zusammstellung von Einheiten, und Einheit endlich ist jene Eigenschaft der Dinge, wodurch sie sich entweder nebeneinander im Raume oder nacheinander in der Zeit denken — vorstellen lassen.

Eine Einheit wird im Deutschen eins genennt, und ist der Anfang der Zahlen. Ein Paar Einheiten, oder eins und eins heißt zwey. Kömmt zu zwo Einheiten noch eine hinzu, so nennt man's drey u. s. w. Allein beym Schreiben wäre diese Bezeichnung ungemein mühsam; man hat daher

eigne Karaktere dazu gewählt, welche man Ziffer heißt. Wir haben nur zehn solcher Zeichen, und es hieng anfänglich von der Willkühr der Menschen ab, mehr oder weniger derley Zeichen zu wählen. Vielleicht mag die Anzahl unsrer Finger, woran wir so gerne zählen, Anlaß gegeben haben. Sie sehen so aus: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 0, welches letztere Zeichen Null heißt, und den Mangel einer Einheit oder Zahl anzeigt.

*) Wie die heut zu Tag üblichen Zifferformen in Arabien ihrem Mutterlande entsprungen seyn mögen, ist in meiner größern Arithmetik §. 9. sattsam erörtert, und mag daher, wegen der Neuheit meines Gedankens, dort nachgesehen werden.

Aber was nützen uns die zehn Zahlzeichen, wenn wir nicht mehr als neun Einheiten dadurch auszudrücken vermögen? Auch hierinnfalls hat man Verfügnngen getroffen, die uns in Stand setzen, die größten Zahlen auf eine sehr kurze Art niederzuschreiben. Man hat bey den Ziffern eine gewisse Rangordnung festgesetzt, kraft welcher sie immer zehnfach mehr gelten können. Diese Rangordnung wächst gemäß der morgenländischen Schriftsitte von der Rechten zur Linken bey jeder Zifferstelle. Oder wenn wir uns einbilden, daß die Ziffer, so zu reden, ihr Gesicht gegen uns kehren, so kann man auch sagen, daß ihre Rangordnung von der Linken zur Rechten steige. Wir wollen bey der ersten Annahme bleiben. Wenn ich demnach zehn Einheiten bezeichnen soll, so gebe ich dem Einser durch Beysetzung eines Nulls zur Rechten eben darum die zwote Rangstelle zur Linken, und er wird unter dem Ausblicke (10) zehn gelten. Will ich neben zehn noch eins, zwey oder drey Einheiten u. s. w. ausdrücken,

drücken, so darf ich so ein Ziffer nur statt dem Null hinsetzen, z. B. 11, 12, 13, u. s. f.

Diese zweyzifferichten Zahlen haben das Besondere, daß man sie nach Morgenländerart liest, und das hintere Ziffer zuerst nennt, dann erst das vordere, z. E. die Zahl 57 wird durch sieben und fünfzig gelesen. Nur die Zahlen 11 und 12, welche analogisch einzehn und zweyzehn heißen sollten, machen die Ausnahme, daß man die erste durch das Wort eilf, und die zwote durch zwölf ausspricht.

Man kann durch zwo Zifferstellen nicht mehr Einheiten ausdrücken als neun und neunzig, d. i. 99. Daher setzt man Ziffer in die dritte Rangstelle zur Linken, und hier gelten sie zehnmal mehr als in der zweyten, nämlich hundert.

Es heißt demnach z. E. die Zahl 718 in Worten siebenhundert und achtzehn, 801 achthundert und eins u. s. w. Der vierte Zifferrang hat die Benennung tausend, der fünfte zehntausend. Diese beyden Zifferstellen werden, wie so eben vorher erinnert worden, rückwärts zusammgelesen. Nachher folgen hunderttausend, Millionen, zehn Millionen, hundert Millionen u. s. f. bis zur 13ten Zifferstelle, wo man Billion sagt, welches so viel ist, als millionmal Million; bey der 19ten Trillion: das heißt, nach sechs Zifferstellen kömmt allemal wieder eine neue Benennung vor, welche alle von den lateinischen Zahlwörtern leicht abzuleiten sind, als Quatrillion, Quintillion, Sextillion, Septillion, Oktillion, u. s. f. Hier kann man die Sache mit einemmale überblicken.

5 7 6 4 8 0 9 2 6 5 7 7 4 4 1 6 9 2 2 Einheiten
Zehner
Hunderter
Tausender
Zehntausender
Hunderttausender
Millionen
Zehnmillionen
Hundertmillionen
Tausendmillionen
Billionen
Zehnbillionen
Hunderbillionen
Tausendbillionen
Zehntausendbillionen
Hunderttausendbillionen
Trillionen u. s. f.

Man liest diese Zahl gemäß dem Sprachgebrauche auf folgende Art: Fünf Trillionen, siebenhundert vier und sechzigtausend achthundert neun Billionen, zweyhundert fünf und sechzigtausend siebenhundert und vier und siebenzig Millionen, vierhundert sechzehntausend, neunhundert zwey und zwanzig.

Aus dem bisher Gesagten lassen sich nun leicht die wenigen Regeln abziehen, wie jede geschriebne Zahl, die aus mehr als einem Ziffer besteht, ausgesprochen werden müsse. Ich will sie in's Kurze fassen, und hieher setzen.

1) Zweyziffrichte Zahlen werden rückwärts gelesen, daß heißt, das Ziffer der Einheiten zur Rechten, wenn es kein Null ist, wird zuerst gesprochen und dann jenes der Zehner. — 63, drey und sechzig. 70, siebenzig. 88, acht und achtzig.

2) Bey Zahlen von dreyen Ziffern wird das erste Zahlzeichen zur Linken, nämlich das Hunderterziffer zwar allererst gelesen, aber die beyden übrigen befolgen wieder die obige erste Regel. — 327,

drey-

dreyhundert sieben und zwanzig. 500, fünfhundert. 907, neunhundert und sieben.

3) Haben die Zahlen 4 Ziffer, so spricht man noch vor den Hunderten die Tausender; die übrigen Regeln bleiben wieder. — 2164, zweytausend einhundert vier und sechzig. 6000, sechstausend. 9004, neuntausend und vier.

4) Weil bey fünf Ziffern Einheiten und Zehner vom Tausenderrang vorausgehen, so müssen diese zwey Ziffer mehrmals rückwärts gelesen werden. — 31924, ein und dreyßigtausend neunhundert vier und zwanzig. 40000, vierzigtausend. 60908, sechzigtausend neun hundert und acht.

5) Bey sechsziffrichten Numern zählt das erste Ziffer zur Linken Hunderter im Tausenderrange; folglich liest mans vor den Einheiten und Zehnern derselben. — 592663, fünfhundert zwey und neunzig tausend sechshundert drey und sechzig. 700000, siebenhunderttausend oder siebenmal hunderttausend. 303040, drey hundert drey tausend und vierzig.

6) Das erste Zahlzeichen siebenziffrichter Zahlen hat einen Millionwerth, und wird auch vom Anfange gelesen. — 5614119, fünf Millionen, sechshundert vierzehn tausend, einhundert neunzehn. 2000000, zwey Millionen. 6000340, sechs Millionen, dreyhundert vierzig.

7) Bey Zahlen von mehr als sieben Ziffern werden diese gegebnen Regeln bis zur Billion, von da bis zur Trillion u. s. f. ordentlich wiederholt. — 41362990, ein und vierzig Millionen, dreyhundert zwey und sechzigtausend, neunhundert neunzig.

zig. 5449000000, fünftausend vierhundert neun und vierzig Millionen. 604000902610500, sechshundert vier Billionen, neunhundert zwey Millionen, sechshundert zehntausend fünfhundert.

Man thut sehr wohl, wenn man den Anfängern zu lieb die Hauptrubriken Millionen, Billionen, Trillionen u. s. f. durch dazwischen gesenkte Linien und darauf gesetzten Strichchen von sechs zu sechs Ziffer kennbar macht, dann überall Einheiten und Zehner wegen dem Rückwärtslesen zusammstreicht, und die Hunderter von unten, so wie Tausender von oben mit einem Punkte bezeichnet, ungefähr auf diese Art:

$$56\,|\,440263\,|\,900462\,|\,941200$$

56 Trillionen, 440263 Billionen, 900462 Millionen, 941 Tausend 200.

Auch in Fällen, wo angegebne oder mit Worten geschriebne Zahlen durch Ziffer ausgedrückt werden sollen, leisten diese Senkstriche gute Dienste. Man ziehe nämlich so viel solcher Linien, als die höchste Hauptrubrik der Zahl fodert, in einer Entfernung von einander, daß immer sechs Ziffer dazwischen Platz haben, so wird man die Zahl leicht nach ihren Hauptbenennungen Million, Trillion u. s. f. in die angewiesnen Fächer einzutheilen im Stande seyn. Es soll z. B. diese Zahl mit Ziffern geschrieben werden: Neunhundert fünf Trillionen, achtzigtausend sechzehn Billionen, dreyßig Millionen, dreyhundert drey. Weil hier die höchste Haupt-

rubrik

rubrik eine Trillion ist, so ziehe man drey Senkstriche ungefähr wie hier

‴ ″ ′
| | |

und gebe jedem Fache die gehörigen Benennungen. Der Entwurf wird demnach so aussehen.

‴ ″ ′
905|080016|000030|000303.

Fragen.

Was versteht man unter Rechenkunst oder Arithmetik? Was ist eine Zahl? was eine Einheit? Wie wird eine Einheit im deutschen Zählen ausgesprochen? wie eins und eins? wie zwey und eins? u. s. f. Wie drückt man diese Zahlen im Schreiben aus, wenn man Zeit und Raum schonen will? Wie viel haben wir Ziffer? Sind nothwendig nicht mehr oder weniger Ziffer? Wie sehen die arabischen Zifferformen aus? Was zeigt das Null an? Welche Einrichtungen hat man getroffen, um durch die nämlichen Ziffer mehr als neun anschreiben zu können? Gegen welche Seite wächst die Rangordnung der Ziffer? Wie kann man mittels dieser Rangordnung zehn Einheiten bezeichnen? wie zehen und eins u. s. w. Was haben diese zweyziffrichte Zahlen besonders? Welche Zahlen machen Ausnahm? Welche ist die letzte und größte zweyziffrichte Zahl? Wie geht die Anschreibung größerer Zahlen vor sich? Wie die Ausdrückung derselben durch Worte? Wie kann die Rangordnung der Zahlen durch einen Entwurf anschaulich gemacht werden? Wie heißen die sämmtlichen Regeln beym Aussprechen ordentlich geschriebner Zahlen? Wie kann man sich helfen, um größere Zahlen sogleich ohne Anstand lesen zu können? Giebt es nicht auch Vortheile, wodurch man diktierte Zahlen sehr geschwind und richtig zu Papier zu bringen im Stande ist?

Exempel.

Wenn die Schöpfung, wie man mit Grunde annehmen kann, bereits 6000 gemeine Jahre zählt, so beträgt das Alter der Welt in Monaten ausgedrückt 72000, in Wochen 312857, in Tagen 2190000, in Stunden 52560000, in Minuten 3153600000, in Sekunden 189216000000, und endlich in Augenblicken, wovon 3 auf eine Sekunde gehen, 567648000000.

Wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre, und ganz aus Wasser bestünde, so würde sie 233950788600320990381400 kölnische Pfunde wiegen; wäre diese Kugel von

Eisen, 1.778.025.993.362 439 526,898.640 Pfund;
wäre sie von Kupfer, 1.988.581.703.102.728.418.241.900 Pfund;
wäre sie von Silber, 2.573.458.674.603.530.894.195.400 Pfund;
endlich vom Golde, 4.445.064.983.406.098.817.246.600 Pfund,
in welchem letztern Fall sie einen Werth von zweytausend vierhundert Quatrillionen, dreyhundert siebenzigtausend vierhundert drey und siebenzig Trillionen, einhundert sechzigtausend einhundert zwey und neunzig Billionen, fünfhundert vier und neunzig tausend zweyhundert acht und zwanzig Millionen, achthundert vierzigtausend Gulden hätte.

§. 2.

Von den Rechnungsarten, und zwar erstens

Von der Addition.

Bis hieher haben wir uns bloß mit der Natur der Zahlen bekannt gemacht, sie aussprechen und anschreiben gelernt; aber noch nichts gerechnet: nun wollen wir auch zu der Art und Weise übergehen, wie man es anzugehen habe, um aus bekannten Zahlen unbekannte zu finden.

Eine

Eine Zahl kann keine weitere Aenderung leiden, als daß man eine andere Zahl zu ihr hinzu, oder von ihr hinweg thut; das heißt mit andern Worten: Zahlen lassen sich entweder vermehren oder vermindern; zu jeder andern Veränderung sind sie schlechterdings unfähig. Es kann daher in der Arithmetik auch nur zwey Hauptrechnungsarten geben, nämlich die **Addition** (Vermehrung) und die **Subtraktion** (Verminderung). Gesetzt auch, es werden manchmal noch andere genennt, so sind es doch, im Grunde genommen, nur **untergeordnete** Rechnungsarten.

Addition ist demnach jene arithmetische Verrichtung (Operation) wodurch mehrere gegebne Zahlen in eine einzige Zahl gebracht werden, oder wodurch eine unbekannte Zahl gefunden wird, welche mehrern gegebnen Zahlen zusammgenommen gleich ist. Man heißt diese herausgebrachte Zahl **Summe** und die gegebnen Zahlen die **summierenden Glieder.** Wir wollen das durch ein Beyspiel versinnlichen. Karl sagt zu Fritzen: „Denken sie einmal „wie stark meine Bibliothek ist. Ich habe 13 deutsche Bücher verschiednen Inhalts, 5 Grammatiken, 4 Lexikon's, 15 Klassiker, 9 Dichter, und „2 Rechenbücher". Wenn nun Fritz wissen will, aus wie vielen Büchern Karls Bibliothek besteht, so muß er eine Zahl ausfindig machen können, die so viele Einheiten enthält, oder so groß ist, als alle diese 6 gegebnen Zahlen zusammgenommen, und dieß heißt nun addieren.

Wenn wir gegenwärtigem Exempel ein anders entgegensetzen, so werden wir auch sehen, welche Eigenschaft die Zahlen haben müssen, daß sie ad

diert

diert werden können; denn es giebt auch Zahlen, welche sich, als solche betrachtet, lediglich nicht addieren lassen. — Es antworte Fritz z. B. auf Karls Aeußerung so: „Und ich habe in meinem „Bücherkasten 20 Bücher, 12 Kupferstiche, 8 „Schaumünzen, und 5 Erzstuffen; was macht dieß „zusamm"? Solche Zahlen nun, wenn man sie auch wirklich addieren würde, geben am Ende weder lauter Bücher, noch lauter Kupferstiche, noch lauter Schaumünzen u. s. w. Es müssen daher die Zahlen, wenn sie zur Addition fähig seyn sollen, durchgehends schon gleiche Benennung haben, oder doch wenigst so eine allgemeine Benennung, die auf alle verschiednen Benennungen passend ist, zulassen. Z. B. in unserm Exempel Stück, Ding, Sache u. d. gl. Man heißt solche Zahlen, welche einerley Benennung haben, nach der Sprache der Arithmetiker, gleichartig oder auf griechisch homogen; die andern hingegen ungleichartig, — heterogen.

Aber wie wird dann bey gleichartigen Zahlen die Addition wirklich verrichtet? Das wollen wir itzt sogleich lernen. Nur müssen wir zuvor noch ein Paar Wort von einigen hieher gehörigen arithmetischen Zeichen erinnern. Ein aufrechtstehendes Kreutz (+), das zwischen zweyen oder mehrern Zahlen hineingeschrieben ist, bedeutet, daß eben diese Zahlen addiert werden müssen: z. B. 2 + 3 + 1 heißt, man soll 2 und 3 und 1 in eine Summe bringen. Meistentheils wird dieß Zeichen durch plus oder mehr ausgesprochen, obwohl man eigentlich und sagen sollte. Zween gleichlaufende Querstriche bedeuten Gleichheit, z. E. 5 + 1 = 6. Man lieset hier: 5 plus 1 æqual oder gleich 6. Will man die Ungleichheit zwoer Zahlen ausdrücken,

wel-

welches sich zwar in der Arithmetik selten zuträgt, so bedienet man sich eines liegenden V, und kehrt die Spitze jener Zahl zu, welche kleiner ist z. B. $3 < 4$ oder $4 > 3$, und heißt: 3 ist kleiner als 4; oder 4 ist größer als 3.

Zum Addieren selbst braucht man keine andere Vorbereitung, als daß man die etlichen kleinen Summen im Kopfe habe, welche was immer für zwo von den ersten neun Urzahlen vor- und rückwärts miteinander machen können. Ich meine damit $2+3=5$, $3+2=5$, $4+8=12$, $9+7=16$ u. s. w. Diese Fertigkeit lernt man aber bald durch die Uebung.

Das ganze Geschäft der wirklichen Addition beruht auf den Grundsatz: Das Ganze ist seinen Theilen zusamm genommen gleich. Die Theile der Zahlen sind aber die Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. f. Es wird daher am besten seyn, wenn man zuerst die Einheiten aller zur Addition gegebnen Zahlen in eine Summe bringt, dann auf gleiche Art auch mit allen Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. f. verfährt. Folglich soll man vor der Addition die Zahlen so untereinander stellen, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w. zu stehen kommen. Man kann sie demnach in einer Reihe hinaufzählen, ohne so leichtlich irre zu werden. Geben die sämmtlichen Einheiten einen oder mehrere Zehner, so werden selbe zu der nächsten Reihe oder Kolumne genommen, und das Uebrige angeschrieben. Ein gleiches versteht sich ebenfalls von der Reihe der Zehner, Hunderter, Tausender, wenn solche vorhanden sind; weil immer ein Zehnfaches was immer

für

für einer Reihe (Kolumne) ein Einfaches der nächstvorgehenden Reihe zur Linken ist. Die Summe selbst wird meistentheils Ziffer für Ziffer unter die summierenden Glieder gesetzt, doch so daß selbe von ihnen durch eine gezogne Querlinie geschieden wird. Setzen wir, folgende Zahlen sind gleichartig: 744 + 9084 + 23 + 66457 + 21492, so müssen sie erstens einmal folgende Stellung erhalten, und den Unterstrich bekommen:

744
9084
23
66457
21492
97800

Dann fängt man so zu sprechen an: 2 und 7 ist 9 und 3 ist 12 und 4 ist 16 und 4 ist 20. Es geben aber 20 Einheiten 2 Zehner und keine Einheit; daher wird an die Stelle der Einser das 0 geschrieben, 2 zur nächsten Kolumne gezählt, und so fortgefahren. Die Summe unter dem Zwerchstrich wird daher zu letzt heißen

Noch ein Beyspiel!

56324
3107
6432
90057
2248
158168

Alle Regeln der Addition lassen sich demnach in diese kurze Sätze fassen.

1) Die

1) Die summierenden Glieder müssen gleichartige Zahlen seyn.

2) Man stelle die summierenden Glieder so untereinander, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen, und schließe die letzte Zahl durch eine Zwerchlinie.

3) Fange bey der äußersten Kolumne zur Rechten an, sie aufwärts zusammzuzählen, und schreibe die Summe jeder Kolumne, wenn sie einziffricht ist, unter die Linie hin; ist sie zweyziffricht, so wird das rechtsstehende Ziffer derselben Zahl angeschrieben, das Linke aber zur folgenden Kolumne gezählt, im Fall noch eine vorhanden ist; denn ist keine mehr vorhanden, so wird die Zahl ganz hingesetzt.

*) Giebt eine Kolumne allenfalls eine dreyziffrichte Zahl, so wird das rechtsstehende wieder angeschrieben, die beyden andern hingegen in eine Zahl zusammgelesen, und zur nächsten Kolumne gezählt, z. B. 125, wo der Fünfer angeschrieben, Zwölf aber zur nächsten Kolumne geschlagen wird.

Fragen.

Was kann man mit Zahlen eigentlich anfangen, oder welche Aenderung leiden Zahlen? Wie viel giebt es demnach Hauptrechnungsarten? Aber es werden hin und wieder auch noch andere Rechnungsarten genennt? Was ist Addition? Können Sie mir keinen Fall auf die Bahn bringen, wo Addition anzuwenden wäre? Was für eine Eigenschaft müssen Zahlen haben, um sie addieren zu können? Wie läßt sich dieß durch ein Beyspiel erläutern? Wie werden gleichnamige Zahlen noch genennt? Wie ungleichnamige? Welches ist das Zeichen der Addition? Wie wird dieß Zeichen ausgesprochen? Wie sieht das Zeichen der Gleichheit und der Ungleichheit aus? Welche Vorbereitung ist zur Addition nöthig? Auf welchem Grundsatze beruht die Addition? Wie schickt man

sich

sich zur wirklichen Addition gleichartiger Zahlen an? Machen sie alles dieß durch ein Beyspiel anschaulich! Wie heißen demnach die Regeln der Addition in's Kurze gefaßt?

Exempel.

a) Jemand giebt sein Alter so an: Mit 6 Jahren kam ich in die Schulen, wo ich 13 Jahre zubrachte. Von da gieng ich zum Regiment und diente 49 Jahre. Nun bin ich schon 17 Jahre in der Pension; wie alt bin ich?

Operation.

6
13
49
17
---
85 Jahre.

b) In einem Walddistrikte stehen 234 Eichen, 740 Fichten, 1962 Buchbäume, 88 Birken und 95 Förchen; wie viele Bäume sind dieß zusamm?

Operation.

234
740
1962
88
95

3119 Bäume.

c) Nach der deutschen Enziklopedie besteht die Kreisarmee, oder die Reichstruppen aus folgenden Mannschaften: Baiern giebt dazu 3473 Mann zu Fuß. Franken 1480 Mann zu Roß, und 5543 zu Fuß. Der churreinische Kreis 14 Mann zu Roß und 9168 zu Fuß. Der oberrheinische Kreis 200 zu Roß, und 6023 zu Fuß. Die schwäbischen Kreistruppen bestehen in 1184 Mann zu Roß, und 6760 zu Fuß. Westphalen giebt 5000 zu Fuß. Wie stark ist nun die deutsche Reichsarmee?

Ope-

Operation.

I	II
Infanterie.	Kavallerie.
4 7 3	1 4 8 0
5 4 3	1 4
1 6 8	2 0 0
9 0 2 3	1 1 8 4
6 7 6 0	
5 0 0 0	
35967 Mann zu Fuß.	2878 Mann zu Roß.

d) Von Erschaffung der Welt bis zur Sündflut verflossen 1656 Jahre; von der Sündflut bis zum Auszuge der Israeliten aus Egypten 857; von diesem Auszuge bis zum Tempelbau Salomons 480; vom Tempelbau bis zum Ende der babylonischen Gefangenschaft 482, von da weg bis zur Geburt Kristi 525; wie lang daurte das alte Testament?

Operation.

1656	
857	
480	
482	
525	
4000	Jahre.

*) Solche Additionen, wo mehrere Unterabtheilungsorten vorkommen, z. B. Gulden, Kreuzer, Pfennige, oder Pfunde, Lothe, Quintlein, müssen wir einsweilen verschieben, bis wir im Stande sind, kleinere Sorten mittels einer andern Rechnungsart in größere zu verwandeln.

§. 3.

Von der Multiplikation.

Es kann sich bey Additionen fügen, daß alle summierenden Glieder von gleicher Größe sind. In solchen Fällen läßt sich die Arbeit merklich abkürzen.

Man

Man darf nur die summierenden Glieder alle abzählen, und die Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. f. aus welchen das summierende Glied besteht, so oft nehmen, als es summierende Glieder sind. Man nennt diese untergeordnete Rechnungsart die **Multiplikation** (Vervielfältigung). Das summierende Glied heißt **Multiplikand**, und die Anzahl aller summierenden Glieder **Multiplikator**. Multiplicieren ist also nichts anders, als den Multiplikand so oft nehmen, oder zu sich selbst addieren, als der Multiplikator Einheiten hat. Die auf diese Art erzielte Summe bekömmt den Namen **Produkt**. Oft werden auch Multiplikand und Multiplikator schlechtweg **Faktores**, und das Produkt nur **Faktum** genennt.

Das Zeichen, daß eine Zahl mit der andern multipliciert werden müsse, ist ein schiefstehendes Kreutz (×) oder auch nur ein Punkt (.). Z. B. 7 multipliciert durch 3, welches 21 giebt, wird daher so geschrieben: $7 \times 3 = 21$, oder $7 . 3 = 21$. Man spricht dieses Zeichen auch häufig durch mal aus, als 7 mal 3 u. d. gl.

Um hier bey wirklichen Multiplikationen operieren zu können, ist nothwendig, daß man sogleich im Sinne weis, oder wenigst in einer Tabelle vor sich liegen habe, was das Zweyfache, Dreyfache — bis Neunfache jeder einziffrichten Zahl (Urzahl) betrage. Man heißt diese Tabell, welche alle mögliche Produkte der neun Urzahlen enthält, das **Einmaleins** oder den **pythagorischen Rechentisch**, und sieht so aus.

Tabelle.

Tabelle.

1 X 1 = 1	4 X 1 = 4	7 X 1 = 7
1 X 2 = 2	4 X 2 = 8	7 X 2 = 14
1 X 3 = 3	4 X 3 = 12	7 X 3 = 21
1 X 4 = 4	4 X 4 = 16	7 X 4 = 28
1 X 5 = 5	4 X 5 = 20	7 X 5 = 35
1 X 6 = 6	4 X 6 = 24	7 X 6 = 42
1 X 7 = 7	4 X 7 = 28	7 X 7 = 49
1 X 8 = 8	4 X 8 = 32	7 X 8 = 56
1 X 9 = 9	4 X 9 = 36	7 X 9 = 63
2 X 1 = 2	5 X 1 = 5	8 X 1 = 8
2 X 2 = 4	5 X 2 = 10	8 X 2 = 16
2 X 3 = 6	5 X 3 = 15	8 X 3 = 24
2 X 4 = 8	5 X 4 = 20	8 X 4 = 32
2 X 5 = 10	5 X 5 = 25	8 X 5 = 40
2 X 6 = 12	5 X 6 = 30	8 X 6 = 48
2 X 7 = 14	5 X 7 = 35	8 X 7 = 56
2 X 8 = 16	5 X 8 = 40	8 X 8 = 64
2 X 9 = 18	5 X 9 = 45	8 X 9 = 72
3 X 1 = 3	6 X 1 = 6	9 X 1 = 9
3 X 2 = 6	6 X 2 = 12	9 X 2 = 18
3 X 3 = 9	6 X 3 = 18	9 X 3 = 27
3 X 4 = 12	6 X 4 = 24	9 X 4 = 36
3 X 5 = 15	6 X 5 = 30	9 X 5 = 45
3 X 6 = 18	6 X 6 = 36	9 X 6 = 54
3 X 7 = 21	6 X 7 = 42	9 X 7 = 63
3 X 8 = 24	6 X 8 = 48	9 X 8 = 72
3 X 9 = 27	6 X 9 = 54	9 X 9 = 81

Aus dieser Tabelle ersieht man erstens, daß die Einheit als Faktor nichts multipliciert, sondern den andern Faktor bey seiner vorigen Größe läßt: zweytens daß das Produkt nicht geändert werde, wenn Multiplikand und Multiplikator verwechselt werden. Es ist z. B. $5 \times 3 = 15$, und auch $3 \times 5 = 15$, wo im ersten Fall 5 der Multiplikand und 3 der Multiplikator war, im zweyten Fall aber 3 der Multiplikand und 5 der Multiplikator geworden. Drittens endlich, daß kein Produkt der neun Urzahlen über zwey Ziffer haben könne; sondern alle entweder ein- oder zweyziffricht bleiben.

Ehe wir zu wirklichen Multiplikationen schreiten, wollen wir selbe in drey Klassen eintheilen. Die erste Klasse soll solche Multiplikationen enthalten, wo der Multiplikator in einem einzigen Ziffer besteht. In der zwoten Klasse hat der Multiplikator eine Einheit mit Nullen, wie 10, 100, 1000 u. d. gl. Bey den Multiplikationen der dritten Klasse sind beyde Faktores mehrziffrichte Zahlen.

Wir wollen uns nun wirklich zum Multiplikationsgeschäft fertig machen. Es soll z. B. 564 durch 5 multipliciert werden. Als eine Addition sieht die Operation so aus:

```
  564
  564
  564
  564
  564
------
Summe 2820
```

Als eine Multiplikation setzt man gemeiniglich den Multiplikator unter das letzte Ziffer des Multiplikands, und zieht darunter eine Querlinie; dann forscht man nach dem Sooftfachen der Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. f. als der Multiplikator begehrt, und befolgt beym Anschreiben die nämliche Regel, wie in der Addition bey der Summe. Hier ist das Beyspiel gemacht!

5 6 4 Multiplikand
5 Multiplikator } Faktores.

2 8 2 0 Produkt oder Faktum.

Die Sprechform lautet ungefähr so: 5 mal 4 ist 20, 0 angeschrieben, bleibt 2; 5 mal 6 ist 30 und 2 ist 32, 2 angeschrieben, bleibt 3; 5 mal 5 ist 25 und 3 ist 28, welches ganz hingesetzt wird.

Ist der Multiplikator mehrziffricht, der Multiplikand hingegen einziffricht, so dörfen sie nur verwechselt werden. Z. B. 6 X 39 ist soviel als 39 X 6 und gehört daher zur ersten Klasse

3 9
6
2 3 4.

Nichts ist leichter als die Multiplikationen der zwoten Klasse, wo ein Faktor 10, 100, 1000 u. d. gl. heißt. Denn man darf dem andern Faktor nur die Nullen anhängen. Z. E. 728 X 10 = 7280. Denn Zahlen bekommen dadurch einen zehnfachen Werth, wenn jedes Ziffer nach §. 1. um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt wird: das thut aber das angehängte Null; folglich ist dadurch der Zweck erreicht worden. Ein gleiches versteht sich auch von

Hundertfachen, Tausendfachen, wenn zwey oder drey Nullen angehängt werden.

Hat die Nullzahl ein stärkers Ziffer als den Einser, so läßt sich selbe allemal in zween solche Faktores zerfällen, wo ein Faktor zur ersten, und der andere zur zwoten Klasse gehört, z. B. 481 X 300; weil 300 = 3 X 100 ist, so kann 481 zuerst durch 3 und dann durch 100 multipliciert werden. Dieß geschieht aber durch eine solche Untereinanderstellung, daß die Nullen des einen Faktors gegen die Rechte hinausgeschrieben werden, wie hier

481
300

144300.

Hat der andere Faktor ebenfalls am Ende Nullen, so werden auch diese dem Produkt angehängt, weil es die doppelte Zerfällung der Faktoren so fodert. Z. E. 260 X 800

260	oder	260
800		800
208000		208000;

denn 8mal 0 oder 8 mal nichts ist wieder nichts.

Sind beyde Faktores mehrzifferichte Zahlen, so setzt man die kleinere unter die größere, nach der ersten Regel der Addition; ausser wenn es Endnullen giebt, in welchem Falle die eben gegebne Vorschrift befolgt wird. Man multipliciere dann mit jedem Ziffer des Multiplikators den ganzen Multiplikand durch, und stelle die daraus entspringenden Produkte so untereinander, daß jedes unter seinem Multiplikatorsziffer anfängt. Am Ende müssen diese

Pro-

Produkte in der nämlichen Stellung addiert werden. Ein Beyspiel hierüber

3 2 9 4
1 4 6

1 9 7 6 4
1 3 1 7 6
3 2 9 4

4 8 0 9 2 4

Der Beweis läßt sich am faßlichsten so dafür machen, wenn man jedes Ziffer des Multiplikators nach ihrem Werthe als eine besondere Zahl angesetzt, den Multiplikand mit diesen Theilen besonders multipliciert, und die eroberten Produkte zusamm addiert, so wird sich, wenn die Nullen, die in der Addition nichts geben, am Ende weggetilgt werden, die Stellung der obigen Partialprodukte bald rechtfertigen. Es besteht aber 146 aus 6 + 40 + 100. Nun multipliciert!

3 2 9 4	3 2 9 4	3 2 9 4
6	4 0	1 0 0
1 9 7 6 4	1 3 1 7 6 0	3 2 9 4 0 0

Addition.

1 9 7 6 4
1 3 1 7 6 0
3 2 9 4 0 0

4 8 0 9 2 4

Schließlich muß ich noch jenen Fall erinnern, wenn sich mitten im Multiplikator ein oder mehrere Nullen befinden. Weil 0 X 2, das ist, niemal 2; 0 X 3 oder niemal 3 u. s. f. allemal wieder Null giebt,

giebt, folglich in einem solchen Partialprodukte lauter Nullen zum Vorschein kämen, so können solche Nullen im Multiplikator, um Zeit und Raum zu ersparen, übersprungen werden. Man vergleiche diese beyden Operationen.

		1	2	4	3	5			
					3	0	0	2	
		2	4	8	7	0			
	0	0	0	0	0				
0	0	0	0	0					
3	7	3	0	5					
3	7	3	2	9	8	7	0		

		1	2	4	3	5			
					3	0	0	2	
		2	4	8	7	0			
3	7	3	0	5					
3	7	3	2	9	8	7	0		

Wir wollen nun alle diese gegebnen und erwiesnen Regeln der Multiplikation so ins Kurze fassen.

1) Man nehme den kleinern Faktor zum Multiplikator: um aber zu sehen, welcher Faktor größer ist, muß man die Endnullen nicht in Erwägung bringen, sondern die Zahlen betrachten, als wenn jene gar nicht da wären.

2) Man stelle den Multiplikator so unter den Multiplikand, daß die letzten Ziffer derselben (von Nullen ist hier keine Rede) übereinander zu stehen kommen, und unterstreiche sie durch eine Linie.

3) Man multipliciere mit jedem Ziffer den ganzen Multiplikand durch, und fange jedes dieser einzelnen Produkte unter seinem gehörigen Multiplikatorsziffer zu schreiben an. Kommen in Mitte des Multiplikators Nullen vor, so werden sie übersprungen.

4) Am

4) Am Ende werden diese Produkte, im Fall der Multiplikator nicht einziffricht gewesen, so wie sie stehen, addiert.

Fragen.

In welchen Fällen der Addition kann das Geschäft merklich abgekürzt werden? Wie geht man bey dieser Abkürzung überhaupts zu Werke? Wie heißt diese Rechnungsart? Was wird hier Multiplikand, was Multiplikator, was Produkt genennt? Was haben diese drey Zahlen noch für Benennungen? Was hat man für ein Zeichen um die Multiplikation anzuzeigen? Wie kann dieses Zeichen ausgesprochen werden? Was wird von Seite des Rechners erfodert, um das Geschäft der Multiplikation vornehmen zu können? Wie viel ist z. B. 3×4, 5×7, 9×8 u. s. w.? Welche Bemerkungen lassen sich in der Einmaleinstabelle machen? Wie lassen sich die Multiplikationsexempel eintheilen? Wie sehen Multiplikationsbeyspiele der ersten Klasse als Additionen aus? Wie als Multiplikationen? Wie werden die Multiplikationen der ersten Klasse gemacht? wie der zweyten Klasse? Wo liegt der Grund dieses Verfahrens? Wie endlich der dritten Klasse, und wie wird der Beweis geführt? Wie können die Nullen mitten im Multiplikator die Arbeit abkürzen? Fassen Sie mir alle Regeln der Multiplikation ordentlich ins Kurze!

Exempel.

a) Auf einer Fleischbank werden auf einmal 95 Kälber gestochen; wie viel giebt es da Kälberfüsse ab?

Operation.

$$\begin{array}{r} 95 \\ \times\ 4 \\ \hline 380 \end{array}$$ Füse.

b) Ein

b) Ein fleißiger Knabe lernt aus seiner französischen Grammaire täglich 10 Wörter auswendig, wie viel wird er in einem Jahre oder 365 Tägen Wörter im Kopfe haben?

Operation.

365
10

3650 Wörter.

c) Auf einer Papiermühle werden wöchentlich 27640 Bögen Schreibpapier verfertigt; was macht dieß in einem Jahre oder 52 Wochen?

Operation.

27640
52

5528
13820

1437280 Bögen.

d) Der Puls schlägt bey einem gesunden Menschen in einer Minute gemeiniglich 72 mal; wie oft geschieht dieß in einer Stund oder in 60 Minuten; wie oft in einem ganzen Tage?

Operation.

72
60

4320 mal in einer Stunde.
24

1728
864

103680 mal in einem Tage.

§. 4.

Von der zwoten Hauptrechnungsart der Subtraktion.

Der kleine Georg, setzen wir, hat 32 Kreutzer in seiner Sparbüchse, und möchte gerne wissen, um wie viel Heinrich sein Bruder, welcher 49 kr. in seiner zählt, mehr habe. Er muß, um dieß zu erfahren, von 49 kr. seine 32 kr. hinweg nehmen oder wegzählen. Wenn er dieß thut, so findet er die unbekannte Zahl, um welche 49 größer als 32; oder umgekehrt 32 kleiner als 49 ist. Dieses Verfahren heißen die Rechnungskundigen Subtraktion, und sagen, Subtrahieren sey in der Arithmetik nichts anders, als den Unterschied zwoer Zahlen bestimmen.

Das Zeichen der Subtraktion ist eine liegende Linie (—) und wird durch minus oder weniger ausgesprochen. Es heißt daher 10 — 3 = 7 so viel als: zehn minus drey ist äqual sieben.

Die Vorbereitungen zum wirklichen Subtraktionsgeschäft bestehen darinn, daß man alle mögliche Unterschiede der Zahlen von 1 bis 19 auswendig weis; z. B. 7 — 5 = 2, 11 — 8 = 3, u. d. gl.

Die Zahlen selbst, um von einander subtrahiert werden zu können, müssen wieder gleichartig seyn; denn man kann z. B. wohl Aepfel von Aepfeln wegnehmen, aber nicht Aepfel von lauter Pfirsichen oder Pflaumen.

Bey der wirklichen Operation schreibt man die kleinere Zahl, welche der Subtrahend heißt, unter

die

die größere, welche Minuend genennt wird, so zwar, daß man Einheiten von Einheiten, Zehner von Zehnern u. s. f. abziehen kann. Der Unterschied dieser beyden Zahlen, welcher am Ende herauskömmt, und durch einen Strich, wie bey der Addition, davon getrennt wird, hat auch die Benennungen Rest, Differenz gemein.

Wir setzen, um ein Exempel zu haben, Peter sey dem Johann 784 fl. schuldig: Peter zahle ihm heute 361 fl.; wie viel bleibt er noch rückständig? Die Rechnung hat nun gegenwärtige Gestalt.

7 8 4 Minuend
3 6 1 Subtrahend
4 2 3 Rest

Die Sprechform ist diese: 1 von 4 bleibt 3; 6 von 8 bleibt 2; 3 von 7 bleibt 4.

Daß auf diese Weise richtig verfahren worden, erhellet daraus, wenn man die Zahlen zergliedert. Peter ist dem Johann 700 + 80 + 4 fl. schuldig: Johann bezahlt 300 + 60 + 1 fl. Es ist also natürlich, daß von den Einheiten noch 3, von den Zehnern 2, das ist 20, und von den Hundertern 4, das ist, 400 bleibt.

Oft fügt sich's, daß irgendwo ein unters Ziffer größer als sein darüberstehendes ist (wenn sie beyde gleich sind, giebt der Rest Null) und also nicht abgezogen werden kann. In solchen Fällen wird von der nächsten Stelle zur Linken eine Einheit entlehnt, und dann ist das zukleingewesene Ziffer um zehn Einheiten vom niederen Range größer geworden. Man kann eine solche Entlehnung der Einheit durch ein

dar-

darauf gesetztes Strichchen anzeigen, damit man sich nachher erinnere, daß jenes Ziffer, von welchem entlehnt worden, um eins weniger gelte. Hier ist ein Beyspiel!

```
  3 4 3 8 2
    3 9 2 7
  -----------
  3 0 4 5 5
```

Man sagt nämlich: 7 von 12 bleibt 5; 2 von 7 bleibt 5; 9 von 13 bleibt 4; 3 von 3 bleibt 0; nichts von 3 bleibt 3.

Es kann sich ereignen, daß jene Zifferstelle, wovon entlehnt werden soll, selbst ein Null ist. Man muß demnach vom zunächst daraufkommenden Ziffer eine Einheit entlehnen. Weil nun diese Einheit 10 solche Einheiten giebt, wie sie beym Null mangeln, so lasse man dort 9 Einheiten liegen, nehme eine Einheit dahin, wo man sie nöthig hat, so wird selbe mehrmals 10 gelten. So viel sich nun Nullen zwischen der Entlehnung befinden, so viel Neuner sind es nachher geworden. Wieder ein Exempel!

```
  3 4 0 0 0 6 0 2
  1 2 5 0 1 8 4 3
  ---------------
  2 1 4 9 8 7 5 9
```

Nun wollen wir diese Regeln der Subtraktion nach unsrer Gewohnheit in's Kurze bringen. Sie heissen so:

1) Man stelle den Subtrahend unter den Minuend, nach der Regel der Addition und Multiplikation, und ziehe eine Querlinie darunter.

2) Ziehe

2) Ziehe jedes Ziffer von dem darüberstehenden ab, und setze den Rest unter die Linie hin.

3) Gleiche Ziffer geben Null zum Rest.

4) Ist das obere Ziffer zu klein zum Abziehen, so werde von dem nächsten Ziffer zur Linken eine Einheit entlehnt, welche demnach das bemeldte kleine Ziffer um 10 mehr gelten macht.

5) Ist das nächste Ziffer selbst ein Null, so gehe man so weit, bis ein anders Ziffer kömmt; die dazwischen liegenden Nullen sind dann als lauter Neuner anzusehen.

Wenn man das Nämliche, was man von einer Zahl hinweggethan, wieder hinzugiebt, so muß natürlich die ursprüngliche Zahl herauskommen, die man vorher gehabt hat. Will man sich demnach bey der Subtraktion überzeugen, ob man richtig gerechnet habe, welches sonst die Probe machen heißt; so darf nur der Subtrahend zum Rest, oder dieser zu jenem addiert werden, und die Summe muß so groß seyn, als der Minuend. Wir wollen zum Beweis das letzte Exempel nochmal hieher setzen, und diese Probe vornehmen.

```
  34000602
  12501843
 ---------
  21498759
 ---------
Probe 34000602
```

Es ist daher Addition die Probe der Subtraktion. Es kann aber auch umgekehrt gezeigt werden, daß Subtraktion die Probe der Addition sey; denn wenn ich alle Zahlen, die ich zu einer anfänglichen Zahl addiert habe, von der Summe

wieder

wieder wegnehme, so muß jene nothwendig übrig bleiben. Die anfängliche Zahl kann aber jede von den summierenden Gliedern seyn. Man darf demnach am Ende der Addition nur alle Zahlen, bis auf eine, auf ein neues zusamm addieren, und diese Summe von der Hauptsumme abziehen, so wird die ausgelassene Zahl übrig bleiben. Hier soll ein Beyspiel stehen, und das Sternchen bey der Probe die ausgelassene Zahl anzeigen.

5436	
590	
6728*	
477	
9408	
22639	Hauptsumme.
15911	Probsumme.
6728	Probrest.

Fragen.

Wie kann man sich beyläufig einen Begriff von Subtraktion machen? Was heißt subtrahieren? Welches ist das Zeichen der Subtraktion, und wie wird es ausgesprochen? Worin bestehen die Vorbereitungen zur Fertigkeit im Subtrahieren? Welche Eigenschaft müssen Zahlen haben, um von einander subtrahiert werden zu können? Wie viel gehören Zahlen zur Subtraktion? Was heißt man Subtrahend, Minuend, Rest? Welche Regel hat man bey der wirklichen Operation des Subtrahierens? Wie läßt sich allenfalls diese Methode zu subtrahieren rechtfertigen? Was ist der Rest, wenn die übereinander stehenden Ziffer des Minuends und Subtrahends gleich sind? Wie hat man es anzugehen, wenn die obern Ziffer kleiner als die untern sind? Wenn aber das nächste Ziffer, wovon eine Einheit entlehnt werden soll, selbst ein

Null ist? Als was hat man nachher die Nullen anzusehen, welche zwischen jenem Ziffer, wo Mangel ist, und jenem, wo entlehnt worden, sich befinden? Wie heißen alle Subtraktionsregeln ins Kurze gefaßt? Was heißt eine Rechnungsprobe? Was ist die Probe der Subtraktion, und warum? Was ist die Probe der Addition und warum? Man zeige beyde Proben in Beyspielen!

Exempel.

a) Wenn eine Post zu 4 Stunden Weges gerechnet wird, so sind von München bis Mannheim 85 Stunde, und von München bis Wien 113 Stund; um wie viel Stunden ist Wien weiter von München als Mannheim entfernt?

Operation.

113
85
Antw. um 28 Stunden.

b) Wir zählen bereits seit Kristi Geburt 1796 Jahre; die Türken hingegen erst 1210 Jahre seit der Geburt ihres Religionsstifters Mahomet; um wie viel Jahre lebte Mahomet später als Kristus?

Operation.

1796
1210
Antw. um 586 Jahre.

c) Alle

c) Alle Länder des russischen Reiches in Europa und Asien halten nach Gatterer 201500 Quadratmeilen. Das aber, was Rußland in Europa besitzt, beträgt 64471 Quadratmeilen; was bleibt für den russischen Länderantheil in Asien übrig?

Operation.

201500
64471
137029 Quadratmeilen.

§. 5.

Von der Division.

Zuweilen fordern es die Umstände, daß man eine Zahl von der andern so oft abziehen soll, als es möglich ist. Dieser Fall der Subtraktion heißt die Division. Der Subtrahend wird hier Divisor, der Minuend Dividend, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor im Dividend enthalten ist, Quotient oder Quotus genennt. Bleibt zuletzt noch etwas übrig, so bekömmt es den Name Residuum, oder schlechtweg auch Rest. Wir wollen dieß alles durch ein Beyspiel versinnlichen. Man giebt Alberten eine Rolle Geldes, worinn sich 46 halbe Kopfstücke (nach unsrer Sprache Zwölfer) befinden. Er soll uns bestimmen, wie viel dieß Gulden sind. Weil nun 5 Zwölfer einen Gulden geben, so darf Albert nur so oft 5 Zwölfer wegzählen, als es möglich ist, und er hat auch eben darum so viele Gulden gezählt. Dieß wird aber hier 9 mal geschehen können; denn $9 \times 5 = 45$, wo also noch 1 Zwölfer übrig bleibt. Hier ist demnach 46 der Dividend, 5 der Divisor, 9 der Quotus, und 1 das Residuum.

Das

Das Zeichen der Division ist der gewöhnliche Doppelpunkt (:) welcher zwischen dem Dividend und Divisor so gesetzt wird, daß jener vor und dieser nach ihm zu stehen kömmt. Z. B. 12 : 4 = 3, welches so gelesen wird: Zwölf dividiert durch vier ist äqual drey. Man setzt auch manchmal, um die Division anzuzeigen, den Divisor unter den Dividend, und trennet beyde Zahlen durch einen Zwischenstrich. Obiges Beyspiel wird demnach so aussehen $\frac{12}{4}$. Dieser Bezeichnungsart bedient man sich vorzüglich in Fällen, wo der Divisor größer als der Dividend ist, z. B. $\frac{7}{8}$. Man nennt solche Ausdrücke Brüche, Fraktionen, von welchen wir tiefer unten ausführlicher sprechen werden. Wenn bey Divisionen zuletzt noch etwas übrig bleibt, so kann dieser Rest ebenfalls so angezeigt werden.

Die Vorbereitung zum fertigen Dividieren besteht mehrmals darinn, daß man die Einmaleinstabelle seinem Gedächtniße recht wohl eingeprägt habe; damit man versuchen könne, wie oft sich der Divisor vom Dividend abziehen lasse.

Wir wollen wieder, wie bey der Multiplikation, drey Klassen von Divisionsfällen festsetzen. In der ersten kommen solche vor, wo der Divisor einziffricht ist; in der zwoten soll der Divisor 10, 100, 1000 u. s. w. seyn; in der dritten endlich kann der Divisor aus mehren andern Ziffern bestehen.

Beym Divisionsgeschäft selbst stellt man, trotz den bisher gegebnen Regeln, den Divisor so weit gegen die Linke des Dividends, als er sich noch abziehen läßt. Dann forscht man, mit welcher Zahl der Divisor multipliciert werden müsse, um noch

von

von dem darüberstehenden Theile des Dividends abgezogen werden zu können. Jene Zahl, die mit dem Divisor multipliciert worden, wird rechts neben dem Dividend als Quotus hinausgestellt, und durch einen dazwischen gezognen Senkstrich von selbem abgesondert. Um die Sache anschaulich zu machen, wollen wir nach und nach die Zahl 729 durch 3 dividieren.

Dividend	7	2	9	$\frac{1}{1}$ 2	Quotus.
Divisor	3				
Produkt	6				

Man wird aus der Vorrückung des Divisors gegen die Linke leicht abnehmen können, zu welchem Zifferrange der Quotus gehöre. Hier wurde er um zwey Ziffer vorgerückt, folglich ist der einsweilige Quotus 2 im Hunderterrange.

Nachdem das Produkt abgezogen worden, wie man hier sieht

$$\begin{array}{r} 7\ 2\ 9\ \frac{1}{1}\ 2 \\ 3 \\ \hline 6 \\ \hline 1 \end{array}$$

so wird zum Rest das nächste Ziffer herabgeschrieben (ist kein Rest geblieben, so kömmt es allein zu stehen) und auf gleiche Weise wieder, wie oben, nach einem Quotus geforscht, der mit dem Divisor multipliciert mehrmals abgezogen, so wie der Quotus hinausgeschrieben werden muß.

Wir wollen das angefangene Exempel ganz fertig machen.

```
7 2 9 | 2 4 3
3
6
---
1 2
  3
1 2
---
- - 9
    3
    9
---
    -
```

Die Sprechform ist diese: 3 in 7 ist 2 mal enthalten (oder geht 2 mal), 2 mal 3 ist 6; 6 von 7 bleibt 1. 3 in 12 geht 4 mal; 4 mal 3 ist 12; 12 von 12 geht auf. 3 in 9 geht 3 mal; 3 mal 3 ist 9; 9 von 9 geht auf.

Es ist also die Zahl 3 in der Zahl 729 gerade 243 mal enthalten. Wenn man demnach die Zahl 3 wiederum 243 mal nimmt, oder was eines ist, 3 durch 243 multipliciert, so muß der Dividend als Produkt herauskommen, wie hier auch wirklich geschieht.

```
2 4 3
    3
-----
7 2 9
```

Weil nun die Multiplikation den Divisor so oft zurücke giebt, als ihn die Division weggenommen, so ist Multiplikation die Probe der Division: und wechselweise, wenn man sich bey Multiplikationen überzeugen will, ob man recht gerechnet habe, so darf nur das Produkt durch den Multiplikator dividiert werden; denn dadurch wird er wieder so oft hinweggenommen, als er vorher zu sich

addiert

addiert worden. Machen wir zum Beweis die Probe von dem obigen Beyspiel, Seite 19. Dort war das Produkt 2820 und der Multiplikator 5. Die Division muß den Multiplikand 564 geben.

```
2 8 2 0 | 5 6 4
        | 1
  5
2 5
---
  3 2
    5
  3 0
  ---
    2 0
      5
    ---
    0
```

Nun lassen sich die Divisionen der zwoten Klasse, wo der Divisor 10, 100, 1000 u. d. gl. ist, sehr leicht erklären. Ich zeigte bey der Multiplikation der nämlichen Klasse, daß, wenn der Multiplikator 10, 100, 1000 u. s. f. ist, man bloß dem Multiplikand so viele Nullen anhängen dörfe, als sich beym Multiplikator vorfinden. Nun ist die Division als Probe das Gegentheil der Multiplikation; folglich müssen hier wieder so viele Endnullen vom Dividend abgeschnitten werden, als der Divisor bey sich hat. Will man also z. B. 543000 durch 1000 dividieren, so wird 543 der Quotus seyn; denn diese Verfahrungsart

```
5 4 3 | 0 0 0 | 5 4 3
1     | 0 0 0 |
```

wird durch die Probe gerechtfertigt;

543 X 1000 = 543000.

Ist der Dividend nicht mit so vielen Endnullen versehen, oder hat gar keines, so müssen gleichwohl auch andere Ziffer weggeschnitten werden, welche man dem Quotus als einen Bruch anhängt, z. B.

946384 : 100

9 4 6 3 | 8 4 / 9 4 6 3 $\frac{84}{100}$
1 | 0 0

Denn die Zahl besteht aus den zween Theilen 946300 + 84. Beym ersten Theil geht die Division auf und giebt 9463: der zweyte Theil ist aber zum Dividieren zu klein; daher muß die Division nur angezeigt werden.

Besteht der Divisor aus Nullen und einem andern Ziffer, welches der Uebergang zur dritten Klasse ist, so werden wieder so viele Endziffer vom Dividend abgeschnitten, als der Divisor Nullen hat: der vordere Theil aber bis zum Abschnitt wird ordentlich durch das Anfangsziffer dividiert. Z. B. es sollen 15900 Kreutzer durch die Division mit 60 zu Gulden gemacht werden, so wird die Operation diese seyn:

1 5 9 0 0 / 2 6 5 fl.
6 0
1 2
3 9
6
3 6
3 0 0
6 0
3 0
0

Denn

Denn ich kann die Kreutzer auch zuvor durch die Division mit 10 in Zehnerstücke verwandeln (denken wir uns, es gebe solche Geldsorten wie z. B. in Oesterreich) und nachher erst, weil 6 Zehnerstücke auf einen Gulden gehen, den erlangten Quotus nochmal mit 6 dividieren, welches die nämliche Antwort auswirft.

Divisionen der dritten Klasse sind etwas mühsamer, als die bisherigen. Man befolgt zwar beym Anschreiben die oben gegebne Regel, und forscht bloß mit dem ersten Ziffer des Divisors zur Linken in jenen Theil des Dividends, welcher darüber steht, wie oft es darinn enthalten sey. Allein, wenn man den ganzen Divisor mit so einem Quotusziffer multipliciert, sieht man sehr oft, daß das Produkt nicht abgezogen werden könne. Nimmt man aber den Quotus zu klein, so bleibt beym Abzuge entweders mehr oder gerade so viel übrig als der Divisor beträgt, welches mehrmals ein Fehler ist. Je kleiner daher das Anfangsziffer des Divisors, und je größer das darauffolgende ausfällt, desto schwerer läßt das Divisionsgeschäft. Jene sind die leichtesten Divisionen dieser Klasse, wo im Divisor nach dem ersten Ziffer ein oder mehrere Nullen stehen, wenn schon noch andere Zahlzeichen nachfolgen. Hingegen bey den übrigen Divisionen der dritten Klasse kann nur lange Uebung, mit einem scharfen Geistesblick verbunden, eine größere Fertigkeit geben. Lassen Sie uns das Exempel 1283082 : 254 zum Muster aufstellen!

1 2 8 3 0 8 2 1/1 5 0 5 1 1/2 2/5 3/4

2 5 4

1 2 7 0

1 3 0

2 5 4

0 0 0

1 3 0 8

2 5 4

1 2 7 0

3 8 2

2 5 4

2 5 4

1 2 8

Wenn ein Ziffer im Quotus Null wird, so braucht es eben nicht, den Divisor mit o zu multiplicieren; sondern man kann sogleich wieder ein neues Ziffer vom Dividend herabsetzen; weil bey dem wirklichen Nullprodukte die Subtraktion doch immer das Vorige giebt.

Ist der Divisor schon einmal mit dem nämlichen Quotusziffer multipliciert worden, mit welchem nun mehrmals soll multipliciert werden, so kann man sogleich das erstere Produkt zum Abzuge herab schreiben.

Kömmt ferner im Quotus ein Einser vor, so darf alsogleich ohne Multiplikation der einfache Divisor abgezogen werden; denn der Multiplikator Eins ändert nichts im Multiplikand. Obiges Exempel fällt durch Anwendung dieser drey Vortheile kürzer und leichter aus.

```
1 2 8 3 0 8 2 | 5 0 5 1 128/254.
  2 5 4
1 2 7 0
-------
1 3 0 8
  2 5 4
1 2 7 0
-------
    3 8 2
    2 5 4
    -----
    1 2 8
```

Divisionen endlich mit einziffrichten Divisoren, sie mögen Ausgangsnullen haben oder nicht, lassen sich besser verrichten, wenn man die Produkte im Sinne behält, sie mittels Ausstreichung der Ziffer vom Dividend abzieht, und die Reste über den Dividend hinauf setzt. Die Rechnungen werden dadurch weit kompendiöser. Das obige Kreutzerexempel S. 36 soll dieß beweisen.

```
  3 3
x 5 9 0 0 | 2 6 5 fl.
  6 6 6 0
```

*) Es giebt noch mehrere Divisionsarten, welche hier zwar der enge Raum ausschliesset, die aber in meinem größern Werke §§. 68. 72. 224 u. 229. alle zu finden sind.

Es sollen nun zuletzt wieder alle Regeln der Division im Kurzen dastehen. Sie heißen so:

1) Man stelle den Divisor so weit links unter den Dividend, daß er sich noch von den darüberstehenden Ziffern abziehen läßt, und mache rechts hinter dem Dividend eine senkrechte Schlußlinie.

2) Man

2) Man forsche, mit welchem Ziffer man den Divisor multiplicieren müsse, um noch die Subtraktion mit dem Produkte vornehmen zu können.

3) Dieses Ziffer werde hinter die Schlußlinie geschrieben, der Divisor damit multipliciert und das Produkt wirklich abgezogen.

4) Sind noch Ziffer im Dividend vorhanden, so wird das nächste davon herabgeschrieben, und, wenn ein Rest vorhanden ist, dazu hingesetzt.

5) Ist der Divisor größer als die darüberstehende Zahl, so schreibt man statt dem Quotus ein Null hinaus, und setzt ein neues Ziffer, wenn eines vorhanden ist, zur Fortsetzung der Division herab.

7) Divisionen mit einziffrichten Divisoren werden bequemer aufwärts verrichtet.

Fragen.

Was ist die Division? Was heißt Dividend, Divisor, Quotus und Residuum? Man zeige alles dieß in einem Beyspiele! Welches ist das Zeichen der Division? Welcher Bezeichnungsart bedient man sich gerne in Fällen, wo der Dividend kleiner als der Divisor ist? Wann wird diese Bezeichnungsart noch angewendet? Was wird zum fertigen Dividieren erfodert? Wie können die Divisionen füglich abgetheilt werden? Wie geht man im Divisionsgeschäft selbst zu Werke? Was ist die Probe der Division, und warum? Was für eine Probe gewährt die Division, und aus welchem Grunde? Wie werden Divisionen der zwoten Klasse behandelt, und wie diese Behandlungsart erwiesen? Wie aber, wenn der Dividend nicht so viele oder gar keine Endnullen hat? Wo ist die Rechtfertigung dieses Verfahrens? Wie verfährt man, wenn

der

der Divisor als Nullzahl ein stärkers Anfangsziffer hat? Man beweise dieß durch ein Beyspiel! Warum sind die Divisionen der dritten Klasse größtentheils mühsamer als die übrigen? Wie kann man erkennen, daß ein Quotusziffer zu wenig genommen worden? In welchen Fällen wird also die Division sehr erschwert? Welches sind die leichtesten Divisionen dieser Klasse? Welche abkürzende Vortheile giebt es in der Division? Wie lassen sich einziffrichte Divisionen bequemer verrichten? Wie heißen nun alle Regeln der Division kurz im Zusammenhange dargelegt?

Exempel.

a) Einer jungen Gesellschaft, die aus 5 kleinen Mädchen bestand, verehrte ein Kinderfreund einige Pfunde Kastanien, mit dem Bedinge, daß sie selbe gleich unter sich austheilen sollen; wie viel Stücke trift ein jedes, da es in allen 380 Kastanien sind?

Operation.

$$\begin{array}{r|l} 5 & \\ 380 & 76 \text{ Kastanien.} \\ 55 & \end{array}$$

b) Jemand möchte gerne ein schönes Liederbuch, das 140 Seiten hat, in 10 Tägen abschreiben, wie viel Seiten muß er in einem Tage fertig machen?

Operation.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 0 \\ 14 & 0 \end{array} \quad 14 \text{ Seiten.}$$

c) Eine

c) Eine einfache Baumallee ist 1344 Schuh lang; wie viel stehen Bäume darauf, wenn einer vom andern immer 24 Schuh entfernt ist?

Operation.

```
1 3 4 4 | 56 Bäume.
  2 4   |
1 2 0
-----
  1 4 4
    2 4
  1 4 4
-----
    0
```

d) Der Planet Saturn braucht zur Vollendung seiner Laufbahn 10749 Täge; wie viel sind dieß gemeine Jahre zu 365 Täg?

Operation.

```
1 0 7 4 9 | 29 Jahre und 164 Täge.
  3 6 5   |
  7 3 0
-------
  3 4 4 9
    3 6 5
  3 2 8 5
-------
  1 6 4
```

e) Einer Steuerausschreibung zufolge gab es im Jahr 1776 in der obern Pfalz 171784 Menschen und 28754 Häuser; wie viel treffen Personen auf ein Haus?

Operation.

```
1 7 1 7 8 4 | 5 bis 6 Personen.
  2 8 7 5 4 |
1 4 3 7 7 0
-----------
  2 8 0 1 4
```

§. 6.

§. 6.

Addition und Subtraktion mit Unterabtheilungsbenennungen.

Wenn man sagt, der Gulden habe 60 Kreutzer, der Kreutzer 4 Pfennige, der Pfennig 2 Häller: oder der Zentner bestehe aus 100 Pfunden, das Pfund aus 32 Lothen, das Loth aus 4 Quintchen, so sind dieß **Unterabtheilungsbenennungen** des **Geldes**, des **Gewichts**. Man spricht nun im gemeinen Leben nicht gerne: ich habe heute 250 Kreutzer eingenommen; oder es sind 96 Loth von dieser und dieser Waarensorte weggegangen, u. d. gl.: sondern man drückt sich lieber in **Gulden** und **Pfunden**, und wenn diese die Zahl 100 übersteigen, in Zentnern aus, und sagt dafür 4 fl. 10 kr. 3 Pfund u. s. w. Es kann sich aber bey Additionen solcher Unterabtheilungsbenennungen sehr oft fügen, daß sich dieselben stark anhäufen, und in höhere Benennungen verwandelt zu werden wünschen. Daher müssen die Häller oder Pfennige durch die Division mit 8 oder 4 zu Kreutzer, und die Kreutzer, wie oben, Seite 39, durch die Division mit 60 zu Gulden umgeschaffen werden. Auf gleiche Weise hat man auch die Quintchen durch 4, die Loth durch 32 und die Pfunde durch 100 zu dividieren. Uebrigens haben Additionen dieser Art eben nichts besonders. Man fängt bey der kleinsten Sorte an, und wenn man durch die Division eine oder mehrere Einheiten der nächst größern Benennung erobert hat, so werden sie auch dahin gezählt, und das allenfalsige Residuum an seinem Orte liegen gelassen. Ein gleiches Verfahren beobachtet man auch bey den übrigen Unterab-

terabtheilungen. Wir wollen hier die ganze Sache in einem Paar Beyspiele anschaulich machen.

I

fl.	kr.	hl.
54	36	—
8	30	5
14	54	3
9	44	5
87 fl.	45 kr.	5 hl.

(5 x3 1/1 1 kr.
8

(4 x6 (5 1/1 2 fl.
6 0

II

Zenten	Pfund	Loth	Quintchen
4	80	27	1
—	71	30	3
1	66	24	2
7	—	12	1
5	94	20	3
20 Zt.	14 Pf.	19 Lt.	2 Q.

(2 10 1/4 2 Lt.
4

115 1/32 3 Pf.
96
19

314 1/100 3 Zt.

Daraus erhellet, daß die Summen der kleinern Abtheilungen sogleich seitwärts irgendwohin geschrieben und dividiert werden. Bey den Pfunden hat es zwar keiner Hinausschreibung nöthig; denn es darf nur das dritte Ziffer als Zentner weggenommen werden, die übrigen bleiben, wegen der Division mit 100. Eben so wenig das erste Ziffer der Kreutzer; weil bey der Darunterstellung des Divisors 60 das Null dahin trift, und das Uebrige zur Rechten nur durch 6 dividiert werden darf.

Bey der Subtraktion der Unterabtheilungsbenennungen ist weiter eben nichts zu bemerken, als

daß

daß, im Falle der Minuend irgendwo zu klein ist, von der nächst größern Benennung eine Einheit entlehnt, und so viele Einheiten zur Zahl addiert werden, als die Abtheilung in sich faßt. Ein gleiches versteht sich, wenn im Minuend gar keine Zahl einer oder mehrern Benennungen vorfindlich ist. Wir setzen diese zwey Beyspiele. Es soll erstens von 84 fl. 44 kr. 1 pf. abgezogen werden 19 fl. 27 kr. 3 pf.; zweytens soll von 13 Zt. weggenommen werden 7 Zt., 85 Pf., 20 Loth.

I

	fl.	kr.	pf.	
		'	(4)	
	84	44	1	(1
	19	27	3	5 1/1 1
Rest	65 fl.	16 kr.	2 pf.	4
Probe	84	44	1	

II

	Zt.	Pfund	Loth
	'	(100)	(32)
	13	—	—
	7	85	20
Rest	5 Zt.	14 Pf.	12 Lt.
Probe	13	—	—

Man thut daher sehr wohl, wenn man das Entlehnte in kleinerer Form darüber schreibt, um die Zahl vor Augen liegen zu haben.

*) Andere Arten von Unterabtheilungsbenennungen z. B. vom Apothecker- und Münzgewicht, Getraidmaase, u. d. gl. sind in meinem größern Werke zu finden.

Die

Die Regeln von derley Additionen und Subtraktionen sind nun kurz beyeinander diese:

1) Man schreibe die Unterabtheilungen ordentlich untereinander, und fange bey der kleinsten die Operation an.

2) Bey der Addition werden die Summen der Unterabtheilungen, wenn es möglich ist, durch die Division in höhere Benennungen umgeschaffen und hinzu addiert.

3) Bey der Subtraktion wird, wenn eine Zahl im Minuend zu klein ist, von der nächsthöhern Benennung eine Einheit entlehnt, zu Einheiten jener niedrigen Benennung gemacht und dazu addiert.

4) Durch die Probe kann man sich allemal am Ende von der Richtigkeit der Rechnung überzeugen.

Fragen.

Was versteht man durch Unterabtheilungsbenennungen? Was hat man bey Additionen dieser Art vorzüglich zu thun? Man zeige dieß in einem Beyspiele! Wo kann man die Division sogleich in Gedanken verrichten? Was hat man sich bey der Subtraktion zu merken, im Fall eine oder die andere Zahl im Minuend zu klein ist, oder ganz abgeht? Ein Beyspiel hierüber! Wie sieht die Probe hievon aus? Wie heißen die Regeln kurz zusamm gezogen?

Exempel.

a) Ein Student soll zu Ende des Schuljahrs seinem Kostherrn folgenden Konto bezahlen: Tischgeld 38 fl. 36 kr. Für den Trunk 11 fl. 44 kr. 3 pf. Bettgeld 8 fl. Für Reparation der Kleider 5 fl. 56 kr. 2 pf. Für Papier, Federn

und

und so andern Kleinigkeiten 1 fl. 46 kr. 1 pf. Für die Aufwartung 3 fl. Rekrationsgeld 2 fl. 43 kr. 2 pf.; was beträgt dieß?

Operation.

fl.	kr.	pf.	
9 8	3 6	—	8 1/2 kr.
1 1	4 4	3	4
8	—	—	
5	5 6	2	(4
1	4 6	1	22 1/3 fl.
3	—	—	6
2	4 3	2	
7 1 fl.	4 7 kr.	— pf.	

b) Karl bekömmt von seinem Herrn Vater 2 fl. 33 kr. 1 pf. Spielgeld. Nach geendigtem Spiele zählte er nur mehr 1 fl. 52 kr. 3 pf.; was hatte er verlohren?

Operation.

fl.	kr.	pf.
	(60)	(4)
1	3 3	1
1	5 2	3
— fl.	40 kr.	2 pf.

c) Jemand wurde gebohren 1725 den 3ten September um 8 Uhr Abends, und starb 1784 den 29igsten März um 3 Uhr früh; wie alt ist er geworden?

Operation.

Jahre	Monate (12)	Tage	Stunden (24)
1784	3	29	3
1725	9	3	20
58 Jahr	6 Monat	25 Tage	7 St.

d) Ein

d) Ein anderer ist nach so einer Berechnung 73 Jahre, 11 Monate, 13 Tage, und 9 Stunden alt geworden, und starb 1794 den 7ten May um 6 Uhr Abends; wann ist er gebohren worden?

Operation.

Jahre	Monate (12)	Tage (30)	Stunden
1794	5	7	18
73	11	13	9
1720 Jahr	5 Monat	24 Tag	9 St.

Folglich wurde er gebohren 1720 den 24igsten May um 9 Uhr früh.

§. 7.

Von gebrochnen Zahlen und ihren Rechnungsarten.

Wo man etwas zerbricht, da giebt es Theile, Bruchstücke ab; und daher kömmt sehr natürlich die Benennung gebrochner Zahlen, Brüche, Fraktionen. Nur müssen hier die Theile durchgehends gleich gemacht werden, und man muß nothwendig noch überdieß wissen, in wie viel solcher Theile das Ganze getheilt worden sey, oder wenigst so zertheilt gedacht werden müsse.

Ein Bruch ist daher ein Theil, oder mehrere gleiche Theile vom nämlichen Ganzen. Bey jedem Bruche müssen zwey Dinge ausgedrückt werden: erstens in wie viel Theile das Ganze getheilt werden soll, oder schon getheilt worden ist; und zweytens wie viel solcher Theile zum Werthe des Bruches

ches gehören. Zum Beyspiel 3 Viertelgulden: das Wort Viertel sagt, daß man sich den Gulden in 4 gleiche Theile getheilt denken müsse, und daß nun 3 solcher Theile den Werth des Bruches ausmachen. Viertel ist also nur der Name von den Theilen, und 3 ist die eigentliche Zahl des Bruches. Man drückt diesen Name auch durchgehends mit einer Zahl aus, und schreibt sie unter die Anzahl der Theile durch eine Zwerchlinie abgesondert hin, z. E. $\frac{3}{4}$. Man heißt selbe den Nenner des Bruches, weil er nennet, was es für Theile sind, Fünftel, Achtel, Hundertel u. d. gl. Die Zahl selbst, welche sagt, wie viel es solcher Theile sind, wird Zähler genennt.

Es hängt daher der Werth des Bruches von Zähler und Nenner zugleich ab. Je mehr von den nämlichen Theilen da sind, oder mit andern Worten, je stärker der Zähler ist, desto größer ist der Werth des Bruches: je größer hingegen beym nämlichen Zähler der Nenner ist, das heißt, in je mehr Theile das Ganze muß getheilt werden, desto kleiner fällt der Werth des Bruches aus. So ist z. B. $\frac{3}{8}$ halb so klein als $\frac{3}{4}$, weil man aus dem Ganzen noch so viele Theile gemacht; folglich sind sie auch halb so klein geworden, als die Viertel.

Man theilt die Brüche ein in eigentliche und uneigentliche. Eigentlich sind sie, wenn sie kein Ganzes betragen: uneigentlich, wenn sie genau ein Ganzes oder darüber ausmachen. So sind $\frac{7}{7}$, $\frac{13}{8}$ u. d. gl. uneigentliche Brüche. Man erkennt sie sogleich aus ihrem Anblicke; wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner, so werden es eigentliche Brüche seyn: im widrigen Falle uneigentliche; denn

sind es gerade so viele Theile, als sich aus dem Ganzen machen lassen, oder gar noch mehr, so muß natürlich der Bruch auch mehr als ein Ganzes enthalten. Allein wie können aus ein und dem nämlichen Ganzen mehr Theile gemacht werden, als es enthält? Das eben nicht; aber die Theile können ja von mehrern gleichartigen Ganzen seyn. Es kann sich ja fügen, daß zween Aepfel, jeder in 4 gleiche Theile getheilt werden, und daß Jemand 5 oder 6 solcher Theile nimmt. In diesem Falle sind nun immerhin $\frac{5}{4}$ oder $\frac{6}{4}$ Aepfel gedenkbar, und so von andern zu reden.

Eine Haupteigenschaft der Brüche ist, daß ein und der nämliche Bruch tausenderley Gestalten anzunehmen vermögend ist, ohne eben seinen Werth verändern zu müssen. Der obige Bruch $\frac{3}{4}$ kann auch z. B. $\frac{6}{8}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{21}{28}$ u. s. f. heißen, und es ist sein Werth nicht im mindesten geändert worden. Man darf nur Zähler und Nenner durch die nämliche Zahl multiplicieren, so bleibt der Werth des Bruches allemal; denn dadurch werden die Theile gerade um so viel mehr gemacht, als sie kleiner geworden; $\frac{6}{8}$ hat zwar noch so viele Theile als $\frac{3}{4}$, aber die Theile sind noch so klein geworden; weil man das Ganze in noch so viele Theile theilen mußte. Was daher der Bruch einerseits durch die Multiplikation des Zählers gewinnt, das verliert er andererseits durch die Multiplikation des Nenners.

Aus gleichen Gründen ist es auch umgekehrt richtig, daß man Zähler und Nenner eines Bruches durch die nämliche Zahl dividieren dörfe, ohne daß der Bruch in sich selbst geändert werde; denn durch die Division des Zählers verliert zwar der Bruch,

aber

aber er gewinnt in dem nämlichen Maaße bey der Division des Nenners; weil dadurch die Theile gerade um das größer geworden, um was sie itzt weniger sind.

Diese zwote Eigenschaft der Brüche kömmt uns oft sehr gut zu statten. Wir können dadurch nicht selten großzahlichten Brüchen eine geschmeidigere Gestalt ertheilen, wodurch theils ihr Werth eher erkannt, theils die Rechnung mit solchen Brüchen erleichtert wird. Nehmen wir als Beyspiel den Bruch $\frac{18}{27}$ fl. her. So wie er ist, kennt man ihms nicht sogleich an, daß sein Werth 40 kr. betrage; wenn man ihn aber überall durch 9 dividiert, so entsteht der ungleich kürzere Ausdruck $\frac{2}{3}$; weil ich nun weiß, daß der dritte Theil eines Guldens 20 kr. beträgt, so kann ich leicht abnehmen, daß zween solche Drittheile 40 kr. werth seyn müssen. Es heißt demnach einen Bruch verkleinern nichts anders, als Zähler und Nenner desselben durch eine und die nämliche Zahl ohne Rest dividieren.

Es giebt auch einige Regeln, wodurch man erkennen kann, ob und durch welche Zahl sich ein Bruch verkleinern läßt: denn daß die Sache nicht allemal angeht, ist außer Zweifel gesetzt. Wenn die Endziffer des Zählers und Nenners gerade sind, das ist 2, 4, 6, 8, 0, so läßt sich der Bruch allemal durch 2 verkleinern. Wenn man die Ziffer des Nenners, so wie des Zählers überall in eine Summe bringt, und prüft, ob sich diese Summen durch 3 dividieren lassen, so lassen sich auch Nenner und Zähler selbst dividieren. Z. B. $\frac{2211}{5190}$, wo vom Zähler die Summe 6 und vom Nenner 15 ist. Daher $\frac{2211}{5190} \overset{3}{=} \frac{737}{1730}$.

Wenn die Endziffer überall Nullen sind, so kann mittels Hinwegschneidung gleichvieler Nullen durch 10, 100 u. s. f. dividiert werden. Ist das Endziffer überall 5 oder einmal 0 und einmal 5, so kann durch 5 verkleinert werden.

*) In dem größern Werke ist auch eine Anweisung gegeben, wodurch man sicher überzeugt werden kann, ob und durch was für eine Zahl sich ein großzahlichter Bruch verkleinern lasse.

Da Zahlen, um sie addieren zu können, gleiche Benennung haben müssen, so ist bey Brüchen nothwendig, daß, wenn sie addiert werden sollen, ihre Nenner gleich sind; denn die Zähler sind eigentlich die Zahlen der Brüche; die Nenner hingegen sind nur die Nämen dieser Zahlen; daher müssen sie gleich seyn. Bey der Addition selbst werden nur die Zähler zusammaddiert, und der Nenner wieder darunter geschrieben; indem der Name der Zahlen durch die Addition nicht geändert werden kann. Es ist daher $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{11}{10}$; denn würde man den Nenner durch Worte ausdrücken, z. B. 1 Zehntl, 3 Zehntl und 7 Zehntl, so giebt ihre Summe unfehlbar 11 Zehntl.

Wenn die Summe ein uneigentlicher Bruch wird, so können die Ganzen allemal durch die Division herausgehoben werden; so ist $\frac{11}{10} = 1 + \frac{1}{10}$ oder $1\frac{1}{10}$.

Sind die Nenner nicht gleich, so können sie doch durch einen Kunstgriff gleich gemacht werden. Es darf nur Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit den Nennern aller übrigen Brüche multipliciert werden; weil durch die Multiplikation mit den nämlichen Faktorn bey Zähler und Nenner die

Werthe

Werthe der Brüche, gemäß der ersten Haupteigenschaft derselben, nicht geändert werden; und weil bey jedem Nenner, wegen der Zusammenkunft der nämlichen Faktorn, die Produkte, folglich auch die neuen Nenner, Gleichheit erhalten. Es sollen z. E. die Brüche $\frac{2}{3} + \frac{1}{8} + \frac{4}{5}$ gleiche Nenner bekommen, und die Sache wird anschaulich seyn.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{8} + \frac{4}{5} = \frac{2 \times 8 \times 5}{3 \times 8 \times 5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{8 \times 3 \times 5} + \frac{4 \times 3 \times 8}{5 \times 3 \times 8} = \frac{80}{120} + \frac{15}{120} + \frac{96}{120},$$

welche man Kürze halber auch so schreiben kann $\frac{80+15+96}{120}$.

Oder nehmen wir nur zween Brüche, etwa $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$

$$\frac{3 \times 9}{7 \times 9} + \frac{2 \times 7}{9 \times 7} = \frac{27}{63} + \frac{14}{63}.$$

Es lassen sich demnach alle Brüche addieren; weil man ihnen gleiche Nenner zu geben im Stande ist.

Da Subtraktion eben so gut Gleichartigkeit der Zahlen, wie die Addition fodert; so müssen auch Brüche, wenn sie voneinander subtrahiert werden sollen, entweders schon gleiche Nenner haben, oder im widrigen Falle, nach der vorhergehenden Methode, zu gleichen Nennern gebracht werden. Wir wollen einsweilen nur zwey Exempel vor die Hand nehmen, eins, wo schon gleiche Nenner da sind, das andere, wo selbe erst hergeschaft werden müssen. Sie heißen meinetwegen $1\frac{3}{5} - \frac{7}{5}$ und $\frac{8}{9} - \frac{3}{5}$. Das erste giebt ohne weiters zum Reste $\frac{6}{5}$, das zweyte aber bekömmt zuvor wegen gleichen Nennern diese Gestalt: $\frac{40}{45} - \frac{27}{45}$, und läßt zum Rest $\frac{13}{45}$.

Manchmal ereignen sich die Fälle, daß Brüche von ganzen Zahlen abgezogen werden sollen, z. B. $5 - \frac{3}{8}$. Hier thut man am besten, wenn man

von

von der Zahl eine Einheit entlehnt und sie zu einem uneigentlichen Bruch von dem nämlichen Nenner macht, den der Subtrahendbruch hat. Das Uebrige ergiebt sich von selbst.

5 $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ also ist der Rest $4\frac{5}{8}$.

Bey Bruchsubtraktionen übrigt noch ein Fall, welchen wir nicht ungerüget lassen dörfen. Es kann sich fügen, daß ein Bruch von einer gemischten Zahl, die nämlich aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, wie $4\frac{1}{2}$, abgezogen werden soll, wo der dabey befindliche Bruch dem Werthe nach kleiner als der Subtrahend ist. Wir wollen $7\frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ setzen. Wenn hier die Nenner der Brüche gleich gemacht werden, so erscheint $\frac{4}{12} - \frac{9}{12}$ und man sieht, daß sich 9 von 4 schlechterdings nicht abziehen läßt. Man muß daher bey solchen Ereignissen von der ganzen Zahl wieder eine Einheit entlehnen und zum Minuendbruche addieren: dieß kann aber geschehen, wenn man die Einheit, wie vorher, zu einen uneigentlichen Bruch vom nämlichen Nenner macht, den der zukleine Minuendbruch wirklich schon hat. Im gegenwärtigen Beyspiele muß die entlehnte Einheit zum Bruch $\frac{3}{3}$ gemacht werden, weil der Bruch, dem diese Einheit beygesetzt werden soll, ebenfalls $\frac{1}{3}$ heißt. Die weitere Rechnung fällt nun so aus:

7 $\frac{3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$

oder $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{16}{12} - \frac{9}{12} = \frac{7}{12}$.

Also der Rest $6\frac{7}{12}$.

Hieher gehören auch die Beyspiele, wo lauter gemischte Zahlen vorkommen, und sich doch Bruch

von

von Bruch nicht abziehen läßt, wie etwa $11\frac{2}{5} - 6\frac{6}{7}$, welches folgende Rechnung giebt:

$$\begin{array}{r} 11 \\ \hline 6 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \frac{5}{5} + \frac{2}{5} - \frac{6}{7}$$

oder $\frac{7}{5} - \frac{6}{7} = \frac{49-30}{35} = \frac{19}{35}$

Rest also $4\frac{19}{35}$.

Ehe wir zu den fernern Rechnungsarten der Brüche übergehen, müssen wir vorläufig ein Paar Worte von der Reduktion und von der Auflösung der Brüche sprechen. Man versteht unter Reduktion jene arithmetische Verrichtung, wodurch man gemischte Zahlen zu uneigentlichen Brüchen umschaffet. Z. B. $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$; denn ein Ganzes hat 4 Viertel, folglich 2 Ganze 8 Viertel, welche mit den 3 Vierteln des Bruches selbst 11 Viertel geben. Es wird daher zur Reduktion solcher gemischten Zahlen nicht mehr erfordert, als daß die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliciert, und zum Produkt der Zähler addiert wird. Man sagt demnach im obigen Beyspiele 4 mal 2 ist 8 und 3 ist 11. Denn jede ganze Zahl läßt sich durch einen Bruch vorstellen, dessen Nenner die Einheit ist: folglich besteht die gemischte Zahl aus zween Brüchen, die zur gleichen Benennung gebracht zu werden verlangen, wo dann die Operation die nämliche seyn wird

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{8+3}{4} = \frac{11}{4}$$

Auflösung der Brüche heißt jene Verfahrungsart, wodurch man den Werth des Bruches in kleinere Unterabtheilungsbenennungen zu bestimmen sucht,

z. B.

z. B. einen Guldenbruch in Kreutzern, Pfenningen u. d. gl. einen Zentnerbruch in Pfunden, Lothen, u. s. f. Da nun der Zähler des Bruches eigentlich die Zahl ist, welche, weil sie zu klein ist, durch den Renner nicht dividiert werden kann; so wird natürlich die Division eher möglich seyn, wenn man diese Zahl in eine kleinere Unterabtheilungsforte verwandelt. Z. B. $\frac{2}{3}$ fl., wenn man hier die 2 fl., welche durch 3 nicht dividiert werden können, zu Kreutzer macht, so geben selbe 60 × 2 = 120; folglich ist 120 : 3 = 40 kr. der Werth des Bruches.

Geht die Division nicht auf, so wird das Residuum entweder als ein neuer Bruch dem Quotus wieder angehängt: oder wenn es möglich ist, und es der Mühe lohnt, in eine noch kleinere Unterabtheilungsforte verwandelt, und mehrmals dividiert.

Läßt jene Einheit, wovon der Zähler eines Bruches Theile enthält, keine Unterabtheilung mehr zu, so ist auch der Bruch keiner weitern Auflösung fähig. Z. B. $\frac{1}{2}$ Baurenhof, $\frac{3}{4}$ Klafter Holz, $\frac{2}{3}$ Häller u. d. gl.

Endlich wollen wir auch Brüche multiplicieren und dividieren lernen. Einen Bruch durch eine ganze Zahl multiplicieren oder dividieren kann nicht schwer seyn; denn weil eigentlich der Zähler, wie ich schon öfter sagte, die Zahl des Bruches, und der Renner nur der Name davon ist, so muß natürlich nur der Zähler multipliciert werden, und der Renner bleibt wieder der vorige. Z. B. $\frac{3}{10} \times 4 = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$, und $\frac{8}{11} : 2 = \frac{4}{11}$. Geht die Division beym Zähler gähling nicht auf, so darf statt der Division nur der Renner multipliciert werden; weil der Werth des Bruches, wie

gleich

gleich anfänglich erinnert worden, gerade um so viel kleiner wird, je größer man den Nenner macht, z. E. $\frac{5}{9} : 2 = \frac{5}{18}$.

Nun gehen wir über auf solche Multiplikationen der Brüche, wo ein oder beyde Brüche die Einheit zum Zähler haben. Es soll, setzen wir, $\frac{5}{8}$ durch $\frac{1}{4}$ multipliciert werden, das heißt mit andern Worten, es soll $\frac{5}{8}$ einviertelmal genommen werden; nun aber den vierten Theil von $\frac{5}{8}$ zu bestimmen, muß der Bruch $\frac{5}{8}$ durch die ganze Zahl 4 dividiert werden. Brüche werden aber, wie wir so eben gehört haben, dadurch dividiert, wenn man den Nenner multipliciert; folglich ist $\frac{5}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8} : 4 = \frac{5}{32}$. Es wäre aber das Nämliche herausgekommen, wenn wir sogleich in der ersten Stellung $\frac{5}{8} \times \frac{1}{4}$ Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert hätten.

Andere Brüche, deren Zähler größer als die Einheit ist, lassen sich allemal in solche zween Faktoren zerfällen, wovon einer eine ganze Zahl, und der andere ein Bruch mit den Einheitszähler ist, z. B. $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$ oder $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3$. Es darf demnach der Multiplikator nur allemal auf eine solche Weise zerfället und der Multiplikand auf zweymal multipliciert werden, wie etwa $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{5} : 3 = \frac{8}{15}$; woraus man wiederum abnimmt, daß gleichfalls das Nämliche herauskömmt, wenn man in der ersten, ursprünglichen Stellung solcher Brüche $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ nur sogleich Zähler mit Zähler und Nenner durch Nenner multipliciert. Wir dörfen demnach bey Multiplicierung der Brüche als eine Universalregel an-

neh-

nehmen, daß allemal Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert werden dörfen.

Wenn sich gemischte Zahlen als Faktores einfinden, so kann man ihnen durch die Reduktion gar leicht die Bruchgestalt ertheilen; auch sogar ganze Zahlen darf man, wenn man will, als Brüche auftretten lassen, wenn man ihnen die Einheit als Nenner unterstellt, und die Regel geht wieder allgemein fort: z. E. $7\frac{1}{4} \times 5 = \frac{29}{4} \times \frac{5}{1} = \frac{145}{4} = 36\frac{1}{4}$.

Endlich kommen wir auf die Division der Brüche durch Brüche. Weil Division, als entgegengesetzte Rechnungsart, die Probe der Multiplikation ist, so muß ganz natürlich bey der Operation gerade umgekehrt verfahren werden. Bey der Multiplikation multipliciert man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner: es ist daher nothwendig, daß man hier auch Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividiere, als $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Aber was thut man, wenn die Division irgenwo gähling nicht aufgeht? Auch hier ist bald geholfen. Nur den andern Theil des Dividendbruches multipliciert: geht der Zähler nicht auf, so multipliciere man den Nenner; und geht der Nenner nicht auf, so multipliciere man den Zähler. Denn durch das Dividieren des Zählers verliert der Werth des Bruches; er verliert aber auch das Nämliche durch die Multiplikation des Nenners. Ferners, durch die Division des Nenners gewinnt der Werth des Bruches; er gewinnt aber in eben dem Grade durch die Multiplikation des Zählers. Die Ursache davon ist schon gleich anfangs gegeben wor-

worden. Man darf daher diese Rechnungsarten immerhin mit Vortheil verwechseln. Folglich kömmt man am leichtesten davon, es mögen die Divisionen aufgehen oder nicht, wenn man sogleich Zähler und Nenner des Divisorbruches verkehrt anschreibt, das heißt, den Divisorbruch umstürzt, und nachher die Universalregel der Multiplikation befolgt. Z. E. $\frac{4}{9} : \frac{5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{45}$. Gemischte oder ganze Zahlen können keine Ausnahm machen, weil man leicht im Stande ist, ihnen die Bruchgestalt zu ertheilen, z. B. $1\frac{2}{5} : 4 = \frac{7}{5} : \frac{4}{1} = \frac{7}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$.

Ehe wir diesen Artikel endigen, müssen wir zwo Hauptbemerkungen bey den Rechnungsarten in Brüchen anführen, und dann auch ihren Grund angeben. Multiplicieren heißt vermehren; dividieren hingegen theilen — vermindern: und trotz dieser allgemeinen Begriffe wird das Produkt zweener eigentlicher Brüche immer kleiner als ein Faktor werden: der Quotus hingegen durchgehends größer als der Dividend erscheinen. Woher kömmt dieß widersprechende Ereigniß? Lediglich daher, weil hier sowohl Multiplikator als Divisor kleiner als die Einheit ist. Denn ist Multiplikator und Divisor gerade eins, so bleibt Multiplikand und Dividend ungeändert: sind hingegen diese beyden Zahlen größer als eins, so muß auch das Produkt größer als der Multiplikand, und der Quotus kleiner als der Dividend werden. Was folgt nun natürlicher, als daß bey Multiplikatorn, die kleiner als die Einheit sind, so wie bey solchen Divisorn das Gegentheil statt hat? Es muß nothwendig das Produkt kleiner als der Multiplikand, und der Quotus größer als der Dividend werden. Deutlicher, denke ich, kann die Sache nicht mehr erklärt werden.

Nun

Nun wollen wir diese kurze Lehre von Brüchen in etliche praktische Sätze zusamm ziehen.

1) Brüche können, ohne ihren Werth zu ändern, eine kleinere Gestalt bekommen, wenn man Zähler und Nenner durch eine gemeinschaftliche Zahl ohne Rest zu dividieren im Stande ist.

2) Brüche, wenn sie gleiche Nenner haben, werden addiert und subtrahiert, wenn man diese Rechnungsarten bloß mit den Zählern vornimmt, und den Nenner wieder unter die Summe oder Rest schreibt.

3) Sind die Nenner ungleich, so werden sie durch folgende Regel zu gleichen Nennern gebracht: Man multipliciere jeden Zähler mit den Nennern aller übrigen Brüche, so erhält man so viele Produkte als Brüche sind, welche Produkte nun die neuen Zähler vorstellen, und zum gemeinschaftlichen Nenner das Produkt aus den Nennern aller Brüche zugleich haben.

4) Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, so darf man nur den Zähler vom Nenner abziehen, den Nenner wieder unter den Rest setzen, und die Zahl selbst um eins kleiner machen.

5) Soll ein Bruch von einer gemischten Zahl abgezogen werden, dessen Bruch einen kleinern Werth als der Subtrahend hat, so addiere man, wenn die Nenner gleich gemacht sind, Zähler und Nenner des Minuendbruches zusamm, und ziehe alsdann von der Summ ab. Die dabeystehende Zahl ist dadurch um eins kleiner geworden.

6) Brü-

6) Brüche werden reduziert, wenn man die ganze Zahl durch den Nenner des angehängten Bruches multipliciert, den Zähler dazu addiert, und den Nenner wieder unter diese erhaltne Zahl stellt.

7) Brüche werden aufgelöset, wenn man den Zähler des Bruches durch die Multiplikation in eine kleinere Unterabtheilungsbenennung verwandelt, und das Produkt durch den Nenner dividiert.

8) Bey der Multiplikation der Brüche durch Brüche werden Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert.

9) Bey der Division der Brüche durch Brüche wird der Divisor umgestürzt, und die obige Regel der Multiplikation angewendet.

10) Gemischte Zahlen, wenn sie bey diesen letzten beyden Rechnungsarten etwa Schwierigkeiten veranlassen sollen, können durch Reduktion allemal bald in uneigentliche Brüche umgeschaffen werden. Auch ganze Zahlen sind nicht ausgenommen, weil man ihnen nur die Einheit zum Nenner geben darf, um ebenfalls Brüche vorzustellen.

Fragen.

Woher kömmt die Benennung, gebrochne Zahlen, Brüche, Fraktionen? Was ist bey Brüchen in Rücksicht der Theile nothwendig? Was ist eigentlich ein Bruch? Wie viele Dinge müssen bey Brüchen sichtbar gemacht werden? Was heißt Nenner, was Zähler und warum? Wovon hängt der Werth eines Bruches ab? Wie läßt sich dieses doppelte Abhängen erklären? Wie werden Brüche eingetheilt? Wann sind Brüche eigentlich, wann uneigentlich? Wie läßt sich die

Mög-

Möglichkeit der uneigentlichen Brüche erklären? Was haben Brüche für eine Haupteigenschaft? Wo liegt der Grund dieser Eigenschaft? Was haben Brüche noch für eine andere entgegengesetzte Eigenschaft? Was ist die Ursache davon? Hat diese Eigenschaft auch einen Nutzen? Welche Regeln giebt es, um zu erkennen, wodurch sich ein Bruch verkleinern läßt? Wann lassen sich Brüche addieren und warum? Wie werden Brüche mit gleichen Nennern addiert? Was ist mit Summen anzufangen wenn sie uneigentliche Brüche sind? Wie können Brüche zu gleichen Nennern gebracht werden? Wo liegt der Grund dieses Verfahrens? Was ist bey der Subtraktion in Brüchen zu merken? Was ist in Fällen zu thun, wenn Brüche von ganzen Zahlen abgezogen werden sollen? Was sind gemischte Zahlen? Wie sollen Brüche von gemischten Zahlen abgezogen werden, wo die dabey befindlichen Brüche zum Abziehen zu klein sind? Welche Beyspiele gehören noch hieher? Was versteht man unter Reduktion der Brüche? Was unter Auflösung der Brüche? Läßt sich bey jedem Bruch die Auflösung anwenden? Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl multipliciert, und warum? Wie durch einem Bruch, dessen Zähler die Einheit ist? Wo liegt der Grund dieses Verfahrens? Wie werden Brüche auch durch andere Brüche multipliciert? Welche Universalregel läßt sich daraus herleiten? Wie lassen sich gemischte Zahlen durch Brüche, oder ebenfalls wieder durch gemischte Zahlen multiplicieren? Wie werden Brüche durch Brüche dividiert? Wo ist der Beweis dafür? Wie heißt überhaupts die kurze Regel davon? Wie kömmt es, daß die Produkte der Brüche allzeit kleiner als der Multiplikand, und der Quotus größer als der Dividend wird? Wie heißen alle Regeln, die bey Brüchen anzuwenden sind, im Kurzen dargestellt?

Exempel.

a) Ein Vater ließ seinen 4 Söhnen Röcke vom nämlichen Tuche machen. Auf die Frage, wie viel Ellen wohl jeder vonnöthen hätte, lautete die Antwort des Schneiders so: Ludwig braucht $4\frac{1}{2}$ Ellen, Franz $3\frac{5}{6}$, Aloys $3\frac{3}{8}$ und der kleine Joseph $2\frac{2}{3}$ Ellen. Wie viel Tuch muß nun der Vater kaufen?

Operation.

Ganze	Brüche
4	$\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{2}{3}$
3	
3	144
2	240
(2)	108
	192
	684 | 2
	288 |
	576
	108

Antw. $14\frac{3}{8}$ Ellen.

$2\frac{54}{144}$ | 2 | $\frac{27}{72}$ | 9 | $\frac{3}{8}$

b) Fritz und Paul ließen sich einmal wägen. Als sie fragten, wie schwer jeder wäre, antwortete der Wagmeister: Fritz wiegt $\frac{5}{8}$ Zentner und Paul $\frac{3}{5}$; um wie viel ist Fritz schwerer als Paul? und was betragen beyde Zentnerbrüche in Pfunden?

Operationen.

I

$\frac{5}{8} - \frac{3}{5}$

25
24

Um $\frac{1}{40}$ Zt. ist Fritz schwerer als Paul.

II

$\frac{5}{8}$ 100 $\frac{3}{5}$ 100

5 — 4 — 5 0 0 — 8 8 — 62½ Thlr.

3 — 3 0 0 — 5 5 — 60 Thlr.

c) Ein andermal stellten sie sich unter das Soldatenmaaß und erfuhren, daß Fritz $4\frac{1}{4}$ Schuhe, und Paul $3\frac{7}{8}$ Schuhe habe; um wie viel ist Fritz größer als Paul?

Operation.

$\frac{1}{4}$ 3 — 0

$\frac{5}{4}$ — $\frac{7}{8}$

40 — 28 — 12 — 8 — 4 = $\frac{1}{4}$ Schuh oder 3 Zoll.

d) Ein Vater versprach seiner fleißigen Tochter, daß er die Anzahl der Pfunde, die sie an Flachs spinnen würde, allemal mit $\frac{5}{8}$ fl. multiplicieren und ihr den Betrag schenken wolle. Es wurde alle Vierteljahre abgerechnet, und sie machte in einem Jahre folgende Lieferungen: 3, $2\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{8}$ Thlr; was bekam sie allemal?

Operationen.

I $1\frac{3}{1} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ fl.

II $2\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{8}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{40}{24} = 1\frac{16}{24} = 1\frac{2}{3}$ fl.

III $1\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{7}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{35}{32} = 1\frac{3}{32}$ fl.

IV $3\frac{1}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{125}{64} = 1\frac{61}{64}$ fl.

e) Eine

e) Eine kupferne Flasche hält $9\frac{3}{4}$ Maaß; wie oft kann man mit selber ein Trinkglas anfüllen, welches $\frac{2}{3}$ Maaß fasset?

Operation:

$9\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{39}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{117}{8} = 14\frac{5}{8}$; also nicht gar 15mal.

§. 8.

Von der Regel Detri.

Wenn ich rechnen soll, was z. B. 6 Pfunde von dieser oder jener Waare kosten, so muß ich wissen, wie theuer ein oder mehrere Pfunde von der nämlichen Sorte bezahlt werden. So geht es bey allen Rechnungen dieser Gattung; es müssen drey Zahlen bekannt seyn, wenn eine vierte davon abhängende Zahl gefunden werden soll. Eine ist die Fragezahl, die zwote hat mit der Fragezahl gleiche Benennung, oder ist wenigst von der nämlichen Art, und die dritte giebt den Betrag dieser zwoten an. Es ist daher die Regel Detri nichts anders als eine Anweisung, aus drey Zahlen eine vierte davon abhängende Zahl zu finden. Man nennt sie auch die goldne Regel, weil dadurch beynahe alle Rechnungen, die im gemeinen Handel und Wandel vorkommen, geführt werden können.

Im Anschreiben befolgt sie dieß Gesetz, daß man die Fragezahl, das ist, jene Zahl, wegen welcher eigentlich gefragt wird, zuletzt anschreibt; die Zahl aber, die mit der Fragezahl entweders schon gleiche Benennung hat, oder doch durch die Reduktion einer dieser beyden Zahlen bekommen kann, wird

zu Anfang gesetzt; und nun bleibt für die dritte Größe, die den Betrag der eben genannten Zahl anzeigt, der mittlere Platz übrig. Man heißt dieß die drey Sätze der Regel Detri. Die Aufgabe (wir wollen die nächste beßte vor die Hand nehmen): Was kosten 16 Stück, wenn 1 Stück 33 kr. beträgt? wird demnach so stehen müssen:

Stück	kr.	Stücke?
1	33	16

Die Berechnung selbst, in solchen Fällen, wo der erste Satz eins ist, und auch nach einer allenfalsigen Reduktion noch eins bleibt, wird bald gemacht seyn; denn man darf nur die beyden letztern Sätze mit einander multiplicieren, so kömmt der gesuchte Betrag zum Vorschein und zwar unter einer solchen Benennung, wie der mittlere Satz hat. Der Beweis hievon ist leicht; denn zwey Stücke betragen doppelt so viel als eins: drey Stück dreymal so viel als eins, vier Stück viermal so viel als eins u. s. f. Ueberhaupt also machen viele Stücke gerade vielmal so viel als eins, welches daher allemal die Multiplikation leistet. Wenn man nun in unserm Exempel die zween letzten Sätze 16 und 33 durcheinander multipliciert, so erscheint das Produkt 528 kr.; dieß zu Gulden gemacht, giebt 8 fl. 48 kr.

Wir müssen auch ein Beyspiel vor die Hand uehmen, wo Reduktion nöthig ist. Wie hoch kommen z. E. 56 Pfunde, wenn das Loth 3 kr. 3 pf. kostet?

Ansatz und Berechnung.

Loth	kr.	pf.	Th
1	3	3	56
	4		32
	15		112
			168
			1792
			15
			8960
			1792

2 1 1
26880 — 6720 — 112 fl.
444 6660

Nach der Reduktion hieß der Ansatz, wenn man ihn wiederholen wollte, eigentlich so:

Loth		pf.		Loth
1		15		1792

Es erscheint daher die Antwort in lauter Pfenningen; weil der mittlere Satz Pfenninge enthält. Es ist also nöthig, daß man sie allererst in Kreutzer, und dann in Gulden verwandle, welches oben durch die Division mit 4 und 60 geschah.

Auch Brüche fodern die Reduktion; indem, wie ich schon öfter erinnerte, die Zähler die Zahlen der Brüche, die Nenner aber die Benennung derselben sind. Ich setze das Beyspiel: $\frac{1}{3}$ Elle kostet $\frac{1}{2}$ fl., was machen 17 Ellen?

Ansatz und Berechnung.

Elle	fl.	Ellen?
$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{8}$	17
	9	3
		51 Drittelellen.
3	1	9
4 5 9 — 5 7 $\frac{3}{8}$ fl.		459 Achtelgulden.
8 8	1	

Nach der Reduktion muß man sich also folgende Anschreibung denken:

Drittelelle	Achtelgulden	Drittelellen?
1	9	51

Sollte gähling der letzte Satz noch nebendem, daß der erste Satz ein Bruch ist, eine größere Unterabtheilungsforte enthalten, so muß gleichwohl vor allem in diesem Stücke Gleichheit hergestellt werden. Ein Exempel: $\frac{1}{4}$ ℔ kostet 7 kr. 1 pf., was machen 16 Zt.?

Operation.

℔	kr.	pf.	Zt.?
$\frac{1}{4}$	7	1	16
	4		100
	29		1600
			4
			6400
			29
			576 kr.
			128 1
			185600

2x 285600 — 444 | 42(2 4640 — 6660 | 773 fl. 20 kr.

Oft frägt man auch aus dem Betrag des Mehrfachen um den Betrag des Einfachen. Z. B. 8 Stück kosten 5 fl. 24 kr., was kostet 1 Stück? Bey dergleichen Foderungen wird der letzte Satz immer eine Einheit seyn. Wir wollen nun bald aus der Natur der Sache eine Regel dafür ausfindig machen. Es ist unläugbar, daß ein Stück halb so viel, als zwey Stück koste; ein Stück ein drittl so viel, als drey Stück; ein viertl so viel, als vier Stück u. s. f. Man erhält aber die Hälfte, den dritten Theil u. s. w., wenn man durch 2, 3 &c. dividiert: Folglich heißt die Regel in solchen Fällen: Es muß der mittlere Satz durch den ersten dividiert werden.

Ansatz und Berechnung.

St.	fl.	kr.	St.?
8	5	24	1

60

3 2 4 1/1 40 kr.

8 8

4

1 6 1/1 2 pf.

8

Bey der ersten Division blieben noch 4 kr. übrig; sie mußten also zu Pfenninge gemacht werden, um noch dividieren zu können; und dann erhielt man noch 2 pf.

Die Probe wird gemacht, wenn man das Exempel umkehrt, und sagt: 1 Stück kostet 40 kr. 2 pf. was betragen 8 Stück?

St.	kr.	pf.	St.
1	40	2	8
	4		
	162		
	8		
	x		

x 2 9 6 | 3 (2 4 | 5 fl. 24 kr.
4 4 4 | 60 |

Auch von den erstern Beyspielen sind wir itzt im Stande die Probe zu machen; weil der Ansatz bloß umgekehrt werden darf.

Sind die Unterabtheilungsorten des ersten Satzes größer als des letzten, so muß der erste Satz durch Multiplikation die nämliche Benennung zu erhalten suchen, wie der letzte hat. Z. B. 9 Pfund Zucker werden gekauft für 13 fl. 20 kr., wie hoch kömmt das Loth?

Ansatz und Berechnung.

℔	fl.	kr.	Loth?
9	13	20	1
32	60		
288 Loth	800 |	2 kr.	
	288		
	576		
	224		
	4 (2	8	2
	896 |	3 16/144 |	2/18 | 1/9 pf.
	288		
	864		
	32		

Es kostet daher das Loth
2 kr. 3 1/9 pf.

Pro-

Probe.

Loth	kr.	pf.	Th?
1	2	$3\frac{1}{9}$	9
	4		32
	11		288
	9		100
	100		28800 Neuntelpfen.

1 | 2(2
28800 | 3200 | 800 | 13 fl. 20 kr.
99 | 4 | 660 |

Ist der letzte Satz ein Bruch, der zum Zähler die Einheit hat, aber übrigens zur nämlichen Unterabtheilungssorte, wie der erste Satz gehört, so muß gleichwohl der erste Satz in die nämlichen Theile verwandelt werden. Ein Beyspiel hierüber. Es kosten 15 Ellen 76 fl. 30 kr., wie hoch kömmt ein halbes Viertel, oder was gleich viel ist, $\frac{1}{8}$ Ellen?

Operation.

Ellen	fl.	kr.	Elle?
15	76	30	$\frac{1}{8}$
8	60		
120 Achtelell.	4590 |	38 kr. 1 pf.	
	120 |		
	36		
	99		
	12		
	96		
	3		
	4		
	xx |	1 pf.	
	xx |		

Pro=

Probe.

Elle	kr.	pf.	Ellen
$\frac{1}{8}$	38	1	15
	4		8
	153		120
	120		
	306		
	153		
	2	3(3	

$$1836\frac{1}{4}590\frac{1}{1}76\text{ fl. }30\text{ kr.}$$
$$444\quad\ 660$$

Es ergiebt sich manchmal der Fall, daß der erste Satz eine größere Unterabtheilungssorte enthält, als der letzte Bruchsatz mit dem Einheitszähler. Hier muß nun wieder vor Allem Gleichheit der Unterabtheilungssorten hergeschaft, und nachher erst die letztgegebne Regel befolgt werden. Z. E. Wie hoch kömmt der fünfte Theil eines Metzens, wenn 18 Schäffel Korn um 314 fl. 20 kr. gekauft werden? Es mißt aber das Schäffel schweren Getreides 6 Metzen; nur das Schäffel Haber hat 7 Metzen.

Operation.

Schäffel	fl.	kr.	Metzen?
18	314	20	$\frac{1}{5}$
6	60		
108 Metzen	18860		
5			
540 Fünftelmetzen			

540 1886 0 | 34 kr. 3 $\frac{1}{2}\frac{9}{7}$ pf.
54 0
162

266
54
216

50
4 (2
---
200 | 3 $\frac{1}{2}\frac{9}{7}$ pf.
54
162

38

Probe.

Metzen	kr.	pf.	Schäffel
$\frac{1}{5}$	34	3 $\frac{1}{2}\frac{9}{7}$	18
	4		6
	139		108
	27		5
	992		540
	278		
	3772		
	540		
	15088		
	18860		
	2036880 | 27	332 | 75440 | 4444	2(2 | 188 60 | 66 60
	189		314 kr.
	146		20 kr.

146

146
27
135
118
27
108
108
27
108
108
0

Bis daher haben wir uns mit solchen Aufgaben der Regel Detri beschäftigt, wo entweder aus dem Betrag des Einfachen der Betrag des Mehrfachen gesucht wird; oder umgekehrt, wo man aus dem Betrag des Mehrfachen den Betrag des Einfachen bestimmt. Es ereignen sich aber manchmal Gelegenheiten, wo aus dem Betrag des Mehrfachen der Betrag eines andern Mehrfachen der nämlichen Art gefunden werden soll. Z. B. 5 Stück kosten 9 fl., was machen 12 Stück? Wenn ich nun weiß, wie hoch 1 Stück kömmt, so kann ich auch rechnen, was 12 Stück kosten. Man sieht also sogleich, daß man eigentlich vom Betrag des Mehrfachen auf den Betrag des Einfachen, und dann erst von diesem Einfachen auf das andere Vielfache schließen muß. Die Berechnung würde beyläufig so ausfallen.

I

Stück	fl.	Stück?
5	9	1

Antw. $\frac{9}{5}$ fl., oder 1 fl. 48 kr.

II

II

St.	fl.	St.?
1	2/3	12

9

3
x ø 8 1/1 21 fl.
5 5

60

3
x 8 ø 1/1 36 kr.
5 5

Es kosten also 12 Stück 21 fl. 36 kr., wenn 5 Stück um 9 fl. gekauft werden.

Diese doppelte Verfahrungsart läßt sich nun leicht in eine einzige zusammziehen. Man sezt nämlich das Beyspiel nach den festgesezten Regeln an, multipliciert den mittleren Satz durch den lezten, und dividiert das Produkt durch den ersten, wie hier:

Stück	fl.	Stück?
5	9	12

9

3
x ø 8 1/1 21 fl.
5 5

60

3
x 8 ø 1/1 36 kr.
5 5

Denn

Denn macht man zwo Anschreibungen daraus, so wird allemal bey der ersten Anschreibung jene Zahl die mit der Fragezahl gleiche Benennung hat, der erste Satz werden, und in der zwoten die Fragezahl den dritten Satz abgeben; die übrigen Sätze sind Einheiten, die nichts multiplicieren und dividieren, und die Wiederholung der Antwort aus der ersten Anschreibung. Eine solche Zerlegung hat nun bey Aufgaben dieser Art allemal statt; folglich müssen sie auch durchgehends nach der abgezognen Regel bearbeitet werden.

Wenn die Unterabtheilungssorten des ersten und letzten Satzes nicht gleich sind, so muß es das erste Geschäft seyn, dieselben gleich zu machen. Ein Exempel hierüber! 8 Ballen Schreibpapier werden bezahlt mit 156 fl. 48 kr., was machen 3 Rieß, 7 Buch und 8 Bögen? Es hat aber der Ballen 10 Ries, der Ries 20 Buch, das Buch Schreibpapier 24, und Druckpapier 25 Bögen.

Operation.

Ballen	fl.	kr.	Ries	Buch	Bög.?
8	156	48	3	7	8
10	60		20		
80	9408		67		
20	1616		24		
1600	56448		276		
24	9408		134		
64	56448		1616		
32	9408				
38400	15203328				

38400 (3

15203328 $\frac{1}{1}$ 39(5 $\frac{1}{1}$ 6 fl. 35 kr. 3 $\frac{17}{21}$ pf.
384 00 | 60 |
1152
3683
384
3456
2273
384
1920
35328
4 4 4 2
141312 $\frac{1}{1}$ $3\frac{6528}{9600}$ | $\frac{1632}{2400}$ | $\frac{816}{1200}$
38400
115200 4 3 4
26112 | $\frac{204}{300}$ | $\frac{68}{100}$ | $\frac{17}{25}$

Führt der erste oder der letzte Satz einen Bruch mit sich, oder ist selbst ein Bruch, dessen Zähler größer als die Einheit ist, so muß bey beyden Sätzen die Reduktion zu gleichen Nennern vorgenommen werden. Z. E. $5\frac{1}{4}$ Ellen kosten 42 fl. 27 kr.; was machen 7 Ellen?

Operation.

Ellen	fl.	kr.	Ellen?
$5\frac{1}{4}$	42	27	7
21	60		4
	2547		28
	28		
	20376		
	5094		
	71316		

```
21                    (3
713 16 1/1 33 9(6 1/1 56 fl. 36 kr.
21          660 0
63
---
83
21
63
---
201
 21
189
---
 126
  21
 126
---
   0
```

Zur Erläuterung dieser Operation braucht nicht mehr angemerkt zu werden, als daß man zuvörderst die gemischte Zahl $5\frac{1}{4}$ Ellen durch die Reduktion in lauter Viertel verwandelte. Mit dem Nenner 4 wurden dann auch sogleich die hintern 7 Ellen multipliciert, um ebenfalls Viertelellen zu erhalten.

Wenn sich beym mittleren Satz ein Bruch vorfindet, so ist es am besten, wenn der Nenner sogleich mit dem Divisor multipliciert wird, um dadurch zwo Divisionen in einer Operation zu verrichten; weil man doch allemal wieder nach der ersten Division den Quotus durch den Nenner des mittleren Bruches dividieren soll. Ein kleines Beyspiel soll dieß handgreiflich machen. 3 ℔ kosten $5\frac{1}{4}$ fl. was machen 8 ℔?

Operation mit doppelten Divisionen.

℔	fl.	℔?
3	$5\frac{1}{4}$	8

21
8
168
x x
x 6 8 | 5 6 | 1 4 fl.
3 3 | 4 4

Operation mit einer Division.

℔	fl.	℔?
3	$5\frac{1}{4}$	8

21
8
168 | 1 4 fl.
12
48
12
48
0

4
12

Vorzüglich gut ist diese Verfahrungsart, wenn die erste Division einen Bruch übrig läßt, wo dann in der zwoten Division der Bruch dividiert werden sollte, welches allemal beschwerlich ist. Z. B.

Stück	fl.	Stück?
4	$9\frac{1}{5}$	7

46
7 2 3
322 | 8 0 | 1/2 | 1 | 16 1/10 fl.
4 4 | 5 5 5

Bes-

Besser so:

Stück fl. Stück?

4 $9\frac{1}{5}$ 7

5 4 6

20 7

2

1

3 2 2 $16\frac{1}{10}$ fl.

2 2 0

Wenn sowohl der erste als letzte Satz einen Bruch bey sich hat, so muß vor allen Gleichheit der Nenner hergestellt werden, welches durch wechselseitiges Multiplicieren der Zähler in ihre Nenner geschieht. Hier ist ein Beyspiel!

Ellen fl. kr. Ellen?

$1\frac{5}{6}$ 11 20 $3\frac{3}{4}$

11 60 15

4 680 6

44 900 4 x(1 90

6 1 2 0 0 1 x3 1 23fl. $10\frac{10}{11}$kr.

44 660

172

44

132

400

44

396

40

Nun

Nun kann es nicht mehr schwer seyn, wenn auch alle drey Sätze mit Brüchen versehen sind. Es darf die Regel wegen des mittlern Bruches nur wiederholet werden. Zum Beschluß noch ein einziges Exempel!

Ellen	fl.	kr.	Ellen?
$7\frac{1}{3}$	40	$17\frac{1}{4}$	$13\frac{2}{5}$
22	60		67
5	2417		3
110	4		201
4	9669		
440	201		
	9669		
	19338	2(3	
	1943469 $\frac{1}{1}$	44 1(6 $\frac{1}{1}$	73 fl. 36 $\frac{2}{44}\frac{9}{60}$ kr.
	44 0	660	
	176		
	183		
	44		
	176		
	74		
	44		
	306		
	44		
	264		
	429		

Probe.

Ellen	fl.	kr.	Ellen?
$13\frac{2}{5}$	73	$36\frac{42}{44}$	$7\frac{1}{2}$
67	60		22
3	4416		5
201	440		110
440	177069		
804	17664		
804	1943469		
88440	110		
	1943469	221	
	1943469	1	
	213781590	1 24(17	40 fl. 17 kr.
	8844 0	660	
	17688		
	36901		
	8844		
	35376		
	8844		
	64119		
	8844		
	61908		
	2211		

Die Gesetze, nach welchen die Regel Detri arbeitet, sind nun kurz folgende:

1) Sie setzt die Fragezahl zuletzt, jene Zahl, welche gleichartig mit der Fragezahl ist, zuerst, und den Betrag, der auf diese erste Zahl Bezug hat,

in

in die Mitte. Regel Detri.

Man heißt dieß die 3 Sätze der

2) Hat einer dieser Sätze Unterabtheilungen bey sich, so muß zuerst die Reduktion vorgenommen werden.

3) Sind etwa die zween äussern Sätze an Unterabtheilungsbenennungen noch verschieden, so muß durch Verwandlung der stärkern Unterabtheilung in die nämliche niedrige, völlige Gleichheit der Benennungen hergestellt werden.

4) Weil Brüche ebenfalls nichts anders als Unterabtheilungen vorstellen, so hat man bey ihnen die nämliche Regel zu beobachten: das heißt, man reduciert, und, wenn von den äußern Sätzen die Rede ist, multipliciert mit dem Nenner auch den entgegenstehenden Satz. Haben beyde äußere Sätze Brüche bey sich, so geschieht die Multiplikation durch die Nenner wechselseitig. Hat der mittlere Satz einen Bruch bey sich, so wird mit dessen Nenner allemal der erste Satz multipliciert.

5) Man multipliciert den mittleren Satz durch den letzten und dividiert das Produkt durch den ersten. Der Quotus enthält ganze Einheiten der kleinsten vorfindlichen Unterabtheilung des mittleren Satzes.

6) Die Probe besteht darinn, daß man das gerechnete Exempel umgekehrt ansetzt, nämlich den letzten Satz zum ersten, und den ersten zum letzten macht, und die erhaltne Antwort als mittlern anschreibt. Die Rechnung muß den vorigen mittlern Satz auswerfen.

Fragen.

Was ist die Regel Detri? Wie wird sie noch genennt, und warum? Welches Gesetz befolget die Regel Detri im Anschreiben der drey Zahlen? Wie wird bey der Berechnung verfahren, wenn der erste Satz eine Einheit ist? Wo ist der Grund dieses Verfahrens? Was ist zu merken, wenn der mittlere oder der letzte Satz Unterabtheilungssorten bey sich hat? Was, wenn statt der Unterabtheilungssorten, Brüche vorkommen? In welchen Fällen kann der letzte Satz eine Einheit seyn, und wie geht dann die Operation vor sich? Warum muß so und nicht anders operiert werden? Wie muß man in diesen Fällen Unterabtheilungssorten und Brüche behandeln? Was ist zu thun, wenn der mittlere Satz einen Bruch bey sich hat? Bey welchen Umständen ist diese Verfahrungsart vorzüglich gut, und warum? Was giebt es noch für eine Hauptklasse der Regeldetriaufgaben? Wie müßten diese Aufgaben eigentlich berechnet werden? Welche Regel läßt sich dafür abziehen? Wie werden bey dieser Art Aufgaben Brüche gemeistert? Wie heißen alle Gesetze der Regel Detri im Kurzen?

Exempel.

a) Zu Aschau, in der obern Pfalz, wird der Zentner Eisen für 9 fl. 24 kr. verkauft. Jemand läßt sich eine Lieferung von 26 Zentner verschreiben; was muß er bezahlen?

Operation.

Zt.	fl.	kr.	Zt.?
1	9	24	26

60

564

26

3384

1128

14664

22(2

14664 | 1 244 fl. 24 kr.

6660 |

b) Wie

b) Bey dem Bergamte Fichtelberg kostet hingegen der Zentner gemeines Eisen nur 7 fl. 45 kr., was werden dort 26 Zentner betragen?

Operation.

Zt.	fl.	kr.	Zt.?
1	7	45	26

60
465
26
2790
930
(3
12090 | 201 fl. 30 kr.
6660 |

c) Zu Bodenmais im bairischen Walde wird Vitriol gesotten, und der Zentner an die Ausländer für 4 fl. 45 kr. verkauft. Was beträgt dieß, wenn jährlich im Durchschnitt 1800 Zentner abgesetzt werden?

Operation.

Zt.	fl.	kr.	Zt.?
1	4	45	1800

60
285
1800
2280
285
3
5 13000 | 8550 fl.
66660 |

d) Der

d) Der österreichische Eimer hält 52 baierische Maaß. Ein hiesiger Weinwirth erhält eine Lieferung von 33 solchen Eimern; wie viel wird er bairische Maaß haben?

Operation.

Eimer	Maaß	Eimer?
1	52	33
	33	
	156	
	156	
Antw.	1716	Maaß.

e) Die Mark Gold wird in hiesiger Münze mit 270 fl. bezahlt; wie hoch kömmt der Gran? Es hat aber 1 Mark oder $\frac{1}{2}$ kölnisches Pfund 24 Karat, und das Karat 4 Gran, der Gran 3 Gren.

Operation.

Mark	fl.	Gran?
1	270	1
24		
4		
96		

270 | 1 — 2 fl.
96 |
192
78
60
480 | 1 — 48 kr.
96 |
384
840
96
768
72
4
288 | 1 — 3 pf.
96 |
288

f) Wie

f) Wie hoch kömmt zu Traunstein das Pfund Salz, wenn der Zentner um 2 fl. 36 kr. verkauft wird?

Operation.

Pfund	fl.	kr.	Pfund?
100	2	36	1

60

---

x56 | 1 kr.

x00 |

4 (4

---

224 | 2 6/25 pf.

x00 |

g) Jemand ließ von München nach Frankfurt am Rhein 46 Zentner Waar führen, und mußte für die Fracht 264 fl. 30 kr. zahlen; was begehrte man vom Zentner?

Operation.

Zentner	fl.	kr.	Zentner?
46	264	30	1

60

1587 | 3(45 | 5 fl. 45 kr.

46 60 |

138

207

46

184

230

46

230

0

h) 5 fl Oesterreichergeld machen 6 fl. baierisches Geld. Jemand nahm in Wien 386 fl. 40 kr. ein, und geht nach Baiern; wie groß ist seine Summe in Baiern?

Operation.

Oesterr. Geld.	Baier. Geld.	Oesterr. Geld.?
5 fl.	6 fl.	386 fl. 40 kr.
60		60
300		23200
		6
		xx
		x 39200 | 464 fl.
		33300 |

i) Ein anderer nimmt aus Baiern 270 fl. mit und reiset nach Oesterreich; wie viel hat er dort Geld?

Operation.

Baier. Guld.	Oesterr. Guld.	Baier. Guld.?
6	5	270
		5
		x3
		x 350 | 225 fl.
		666 |

k) Zur Donaumooskultur zwischen Neuburg und Ingolstadt sind bereits 530000 fl. verwendet worden. Man hat aber dafür 60000 Joucharte oder Tagwerke, jedes zu 40000 Quadratschuh angelegt; wie viel Unkösten trift auf ein Jouchart?

Operation.

Jouchart	fl.	Jouchart
60000	530000	1

5 3 o o o o | 8 fl.
6 o o o o |
4 8
5
6 o
3 o o | 5 o kr.
6 |

l) Die Kommission dieser Moorkultur hat im Ganzen 2327 $\frac{3}{8}$ Tagwerke für 21044 fl. von den dortigen Unterthanen an sich gekauft; was gab sie im Durchschnitt für 1 Jouchart?

Operation.

Tagwerk	fl.	Tagwerk?
2 3 2 7 $\frac{3}{8}$	2 1 0 4 4	1
1 8 6 1 9	8	
	1 6 8 3 5 2 | 9 fl.	
	1 8 6 1 9 |	
	1 6 7 5 7 1	
	7 8 1	
	6 o	
	4 6 8 6 o | 2 kr.	
	1 8 6 1 9 |	
	3 7 2 3 8	
	9 6 2 2	
	4	
	3 8 4 8 8 | 2 $\frac{1250}{18619}$ fl.	
	1 8 6 1 9 |	
	3 7 2 3 8	
	1 2 5 o	

m) 100 Münchnerpfund machen in der Oberpfalz 93 $\frac{3}{8}$ Pfund; was betragen 2640 pfälzische Pfunde in München?

Operation.

Pfälz. Pfund	Münchn. Pfund	Pfälz. Pfund?
9 3 $\frac{3}{8}$	1 o o	2 6 4 o
7 4 7		8
		2 1 1 2 o
		1 o o
		2 1 1 2 o o o
		2 1

3

2 1 1 2 0 0 0 | 2 8 2 7 $\frac{77}{249}$ Münchnerpfunde.

7 4 7

1 4 9 4

6 1 8 0

7 4 7

5 9 7 6

2 0 4 0

7 4 7

1 4 9 4

5 4 6 0

7 4 7

5 2 2 9

2 3 1

n) 112 $\frac{1}{2}$ Augsburgerellen betragen 80 $\frac{1}{3}$ Münchnerellen. Ein Landkrammer handelt in Augsburg 64 Ellen Bänder ein, und verkauft sie nach der baierischen Elle; wie viel wird er herausmessen?

Operation.

Augsb. Ellen	Münchnerellen	Augsb. Ellen?
112 $\frac{1}{2}$	80 $\frac{1}{3}$	64
225	241	2
3	128	128
675	1928	
	482	
	241	
	30848 | 675	45 $\frac{473}{675}$ Münchnerellen.
	2700	
	3848	
	675	
	3375	
	473	

o) 12

6) 12938 rheinländische Schuhe machen 13913 baierische Schuhe. Wie groß ist nun ein Mann nach baierischem Maaße, wenn er nach rheinischem Maaße $6\frac{3}{4}$ Schuh mißt.

Operation.

Rhein. Schuh	Baier. Schuh	Rhein. Schuh?
12938	13913	$6\frac{3}{4}$
4	27	27
51752	97391	
	27826	
	375651 | 7 Schuh.	
	51752 |	
	362264	
	13387	
	12	
	267744	
	13287 |	
	1606441 | $3\frac{1347}{12938}$ Zoll.	
	51752 |	
	155256	
	5388	

§. 9.

Von der reesischen Regel.

Wir hätten von der Regelquinque, Regelseptem u. d. gl. welche mit fünf und mehrern Sätzen rechnen, so manches noch zu sagen. Auch von der umgekehrten Regel Detri thaten wir noch keine Erwähnung. Aber dieß geschah deßwegen, weil sich die dahin einschlägigen Aufgaben eben so leicht, wo nicht leichter, nach der allgemein eingeführten reesischen Regel bearbeiten lassen; und weil ich auch deßwegen gesinnt bin, mich darüber etwas weitläuftiger auszubreiten.

Die

Die reesische Regel hat ihren Namen von dem Urheber derselben, dem Hrn. von Rees einem Holländer, der die bey Kaufleuten übliche Kettenpraktik mit einigen Veränderungen auch auf bürgerliche Rechnungsfälle anzuwenden wußte. Ihr Ansatz ist von dem der Regel Detri ganz verschieden; aber dabey so natürlich, daß auch ein sonst schwacher Kopf ihn sehr bald fassen muß, und bey keiner Aufgabe dieser Art so leicht verfehlen kann. Man macht allererst einen Senkstrich und fängt auf der linken Seite mit Hinschreibung der Benennung dessen an, wonach man frägt; setzt die Fragezahl selbst rechts daneben, dann links etwas unterhalb die Zahl, welche gleiche Benennung mit der Fragezahl hat, und wieder rechts daneben den Betrag. Hat dieser Betrag die nämliche Benennung, womit links angefangen worden, so ist der Ansatz fertig; wo nicht, so wird die letzte Benennung links wiederholt, und durch Unterabtheilungssorten so ergänzt, daß die nämliche Benennung rechts aufhört, wie sie links allererst angefangen. Ein Beyspiel soll all dieß Gesagte noch mehr erläutern. 3 ℔ kosten 44 kr., was machen 20 ℔?

fl.?	20 ℔
℔ 3	44 kr.
kr. 60	1 fl.

Die Sprechform heißt daher so: Wie viel Gulden kosten 20 ℔, da 3 ℔ 44 kr machen und 60 kr. 1 fl. ist. So hören Gulden auf, wie sie angefangen.

Hätte man diesen Ansatz in der Regel Detri gemacht, würde er so stehen:

℔	kr.	℔
3	44	20

Weil man nun hier weiß, daß 44 durch 20 multipliciert werden muß, und daß man das Produkt allererst durch 3 und dann die Kreutzer durch 60 zu dividieren habe, so sieht man beym ersten Anblick des reesischen Ansatzes, daß die Zahlen zur Rechten multiplicieren und die zur Linken dividieren.

Ein wichtiger Vortheil, den man zwar auch bey der Regel Detri anwenden könnte, ist bey der reesischen Regel in den meisten Fällen die Verkleinerung. Man versteht darunter jene Verrichtung, wodurch zwo Zahlen, deren die eine links, die andere rechts steht, durch eine willkührlich angenommene dritte Zahl ohne Rest dividiert werden. So z. B. sieht man im obigen Ansatze, daß sich die Zahlen 20 und 60 erst durch 10, oder durch Wegschneidung der Nullen, dann durch 2 dividieren lassen. Nach der Verkleinerung gewinnt das Exempel folgende Gestalt:

fl. ?	z ø ℔
3	4 4 kr.
6 ø	1 fl.
3	

Wenn man beym Verkleinern die Einheit zum Quotus erhält, so wird selbe nicht angeschrieben; weil Eins weder multipliciert noch dividiert.

Aber

Aber wo liegt wohl der Grund, daß man bey der reesischen Regel verkleinern darf, das heißt: daß man auch nach der Verkleinerung noch, so wie vorher, die nämliche Antwort erhält? Lediglich darinn, weil der ganze reesische Ansatz einen Bruch vorstellt, wo die linke Seite der Nenner und die rechte der Zähler ist, ungefähr so: $\frac{20 \times 44}{3 \times 60} = \frac{880}{180}$. Es ist aber oben bey der Lehre von Brüchen dargethan worden, daß der Werth des Bruches ungeändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch die nämliche Zahl dividiert wird; daher

$$\frac{20 \times 44}{3 \times 60} \Big| = \frac{2 \times 44}{3 \times 6} \Big| = \frac{44}{3 \times 3}$$

(10 über $\frac{20 \times 44}{3 \times 60}$, 2 über $\frac{2 \times 44}{3 \times 6}$)

oder

$$\frac{880}{180} = \frac{88}{18} \Big| = \frac{44}{9}.$$

(2 über $\frac{88}{18}$)

Die Berechnung selbst ist am Ende der Verkleinerung bald geschehen. Es werden nur die übergebliebnen Zahlen beyderseits multipliciert, und das Produkt rechterseits durch das linke dividiert.

fl. ? | x ø 1/6
3 | 4 4 kr.
6 ø | 1 fl.
3 | 8
9 | 44 1/4 4 fl.
9
60
3 (3 3)
48 ø 1/5 3 1/3 kr.
99

Was

Was bey der Regel Detri wegen der Reduktion erinnert worden, gilt hier ebenfalls. Man muß nämlich, wenn mehrere Unterabtheilungssorten neben einander stehen, sie alle in die kleinste verwandeln. Gut wird es seyn, wenn man immer mit der kleinsten Unterabtheilungssorte auf der andern Seite anbindet; denn sonst entsteht in der Kette eine Lücke, die zu Ende des Ansatzes unvermeidlich ergänzt werden müßte. Z. B. Was kostet 1 Zt. 36 ℔ 4 Lt., wenn 8 ℔ mit 1 fl. 30 kr. bezahlt werden?

fl. ?	x Zt. 36 ℔ 4 Loth
Lt. 32	1 ℔
℔ 8	x fl. 30 kr.
kr. 60	1 fl.
:10	4356
:3 2	90
:2 4	3
:2 128	x 78
	1089
	3
	3267 1/1 25 fl. 31 13/32 kr.
	128
	256
	707
	128
	640
	67

100
36
136
32
276
408
4356

6 7
6 0 4
4 0 2 0 1/1 3 1 1/3 2 kr.
1 2 8
3 8 4
1 8 0
1 2 8
5 2

Hier wurde allererst durch eine Nebenrechnung bestimmt, wie viele Lothe der erste Satz 1 Zt. 36 lb und 4 Loth giebt, die gefundne Zahl 4356 unterhalb angesetzt, und weil der erste Satz 1 Zt. 36 lb 4 Loth nichts mehr gelten kann, eben darum ausgestrichen. Ferner weiß man auch, daß 1 fl. 30 kr. in lauter Kreutzern 90 ausmacht; deßwegen wird auch 90 heruntergesetzt, und 1 fl. 30 kr. ausgestrichen. Nun geht es über die Verkleinerung los, welche durch die danebenstehende Divisores angezeigt ist, und dann endlich über die wirkliche Berechnung.

*) Die Verkleinerungszahlen 10, 100, 1000 u. s f. werde ich in Zukunft nicht mehr aussetzen, sondern nur beyderseits gleich viele Nullen abschneiden; weil dieß, im Grunde genommen, das nämliche Verfahren ist.

Kommen Brüche oder gemischte Zahlen vor, so müssen diese letztere allemal auf uneigentliche Brüche reduciert, dann in beyden Fällen die Nenner ausgestrichen, und dieselben auf die Gegenseite hingeschrieben werden. Den Grund dieses Verfahrens haben wir schon bey der Regel Detri angegeben, wo ebenfalls nach der Reduktion die Nenner des zweyten und dritten Satzes, welche Sätze bey der reesischen Regel die rechte Seite geben, mit dem ersten Satze, als der linken Seite, und wechsel-

selweise der Nenner des ersten Satzes mit dem letzten Satze multipliciert worden. Wir wollen ein Beyspiel nach beyden Arten berechnen, um zu zeigen, daß die Verfahrungsart die nämliche sey. Man bezahlt, setzen wir, $3\frac{1}{2}$ Ellen um $11\frac{1}{5}$ fl.; was machen $\frac{5}{6}$ Ellen?

Reesische Regel.

fl. ?	$\frac{5}{6}$ Ellen
Ellen $3\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{5}$ fl.
6	5
:2	2
7	56
	(2
:5	$8\frac{1}{1}$ $2\frac{2}{3}$ fl. oder 2 fl. 40 kr.
3	3

Regel Detri.

Ellen	fl.	Ellen?
$3\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{5}$	$\frac{5}{6}$
7	56	5
6	10	2
42	560 $\frac{1}{1}$ 2 fl.	10
5	210	
210	42	
	14	
	60	
	840 $\frac{1}{1}$ 40 kr.	
	24	
	84	

Bayerische Staatsbibliothek München

Weil wir nun auch die reesische Regel mit Brüchen zu behandeln im Stande sind, und bey den meisten Operationen am Ende Brüche zum Vorschein zu kommen pflegen, so können wir itzt auch über jedes gerechnete Beyspiel die Probe machen. Es darf nur, wie bey der Regel Detri, das Exempel umgekehrt werden, und das Uebrige muß sich ganz natürlich von selbst ergeben. Vorher hieß unser letztes Beyspiel: $3\frac{1}{2}$ Ellen kosten $11\frac{1}{5}$ fl.; was machen $\frac{5}{6}$ Ellen? Die Antwort war: $2\frac{2}{3}$ fl. Nun geht die Sprechform so: Wie viel Gulden kosten $3\frac{1}{2}$ Ellen, da $\frac{5}{6}$ Ellen $2\frac{2}{3}$ fl. kosten? Am Ende müssen die obigen $11\frac{1}{5}$ fl. wieder herauskommen.

$3\frac{1}{2}$ Ellen	fl.?
$2\frac{2}{3}$ fl.	$\frac{5}{6}$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \\ \hline 1 \\ 6\,\frac{1}{1} \\ 5\,5 \end{array} \quad 11\frac{1}{5}\text{ fl.}$$

Auf diese Weise werden nun alle Proben gemacht, und man sieht dabey, daß die Sache gar nichts beschwerliches an sich habe.

Noch muß ich bey Bruchexempeln anmerken, daß, im Fall zween Brüche auf entgegengesetzten Seiten gleiche Nenner haben, die Versetzung der Nenner eben nicht nöthig sey; weil sie ohnehin

wieder

wieder durch die Verkleinerung wegfallen. Denn rechne man folgendes Exempel durch die reesische Regel, und man wird sehen, daß, wenn auch die Nenner wirklich auf die entgegengesetzten Seiten übertragen werden, selbe doch sogleich durch die Verkleinerung verschwinden. Was kosten 15 Ellen, wenn $2\frac{1}{4}$ Ellen für $8\frac{3}{4}$ fl. bezahlt werden?

fl. ?	15 Ellen
Ellen $2\frac{1}{4}$	$8\frac{3}{4}$ fl.
9	35
:4	4
:3	3 | 5
	21
	$15 \mid 58\frac{1}{3}$ fl.
	33

Noch zuletzt ein Beyspiel, wo man für Geld um Waaren fragt. Es macht zwar dieser Fall keine Ausnahme, giebt aber doch dem Ansatz eine andere Richtung. Z. E. Wie viel kann man für 1440 fl. Schaafe kaufen, wenn immer 3 und 3 Stück 20 fl. gelten?

Schaafe?	1440 fl.
fl. 20	3 Schaafe
:2	72
	216 Schaafe.

Ein anders Beyspiel! Um 4 kr. kauft man 9 Eyer; wie viel bekömmt man für 2 fl. 24 kr.?

Eyer?	2 fl. 24 kr.
kr. 4	9 Eyer
:4	144
	36
	9
	324 Eyer.

Manchmal ereignet sichs, daß nach der Verkleinerung auf keiner Seite mehr etwas übrig gelassen wird. In solchen Fällen muß allemal die Einheit als Antwort betrachtet werden; weil vor der letzten Verkleinerung eigentlich die Division hätte sollen verrichtet werden. Wird die rechte Seite leer, und befindet sich auf der linken Seite noch eine Zahl, so ist die Antwort ein Bruch, der zum Zähler die Einheit hat; weil man zur Rechten bey der letzten Verkleinerung den Quotus 1 nicht anzuschreiben pfleget. Ueberall Versinnlichung durch folgende zwo Aufgaben: I Wenn 200 Schnecken für 10 kr. gekauft werden; wie hoch kömmt das Stück? II Wie hoch kömmt das Loth, wenn 7 ℔ für 3 fl. 44 kr. bezahlt werden?

I

pf.?	1 Schnecke
200	1 ø kr.
1	4 pf.
:4 5	
Antw.	$\frac{1}{5}$ pf.

II

II

kr. ?	1 Loth
3 z	1 ℔
7	3 fl. 44 kr.

:8 4	z z 4
:4	z 8
:7	7
	Antw. 1 kr.

Solche Rechnungen nun, die den einfachen Kauf und Verkauf betreffen, haben keine weitern Schwierigkeiten. Sie lassen sich leicht, und ohne vieles Nachdenken in einen Ansatz bringen. Etwas anders verhält sich die Sache in den meisten übrigen Rechnungsfällen des bürgerlichen Lebens. Sie haben größtentheils 5 oder mehr Sätze, mögen sie offenbar da stehen, oder aber versteckt seyn. Setzen wir das leichte Exempel. Wie lange werden 10 Maurer zu einer Mauer brauchen; wenn 5 Maurer in 18 Tägen fertig werden? Man mag nun dieß Exempel nach der ordentlichen Regel Detri, oder nach der bisher gegebnen reesischen Regel rechnen, so wird allemal eine verkehrte Antwort herauskommen. Es scheint beym reesischen Ansatze nichts natürlicher als diese Sprechform zu seyn: Wie viele Täge brauchen 10 Maurer; wenn 5 Maurer 18 Tage brauchen?

Tage ?	x ø Maurer
5	1 8 Täge
:5	2
	3 6 Täg.

Und

Und doch ist nichts ungereimter als diese Antwort; da statt 36 Tag nur 9 Täge als halbe Zeit hätten zum Vorschein kommen sollen.

Man muß in solchen Fällen immer auf Ursach und Wirkung Rücksicht nehmen, und jene Sätze, die zur Ursache zusamm gehören, oder mit andern Worten, die die Wirkung miteinander bestimmen helfen, nie von einander absöndern. Es ist auffallend natürlich, daß in unserm Exempel unter der Mauer die Wirkung zu verstehen sey, und daß die Geschwindigkeit oder Größe dieser Wirkung von der Anzahl der Arbeiter, und von der Anzahl der Tage zugleich abhänge. Denn je mehr Arbeiter in der nämlichen Zeit sind, desto größer die Wirkung: je mehr Täge bey den nämlichen Arbeitern, desto größer wieder die Wirkung. Man kann sich demnach ein für allemal merken, daß in allen solchen Rechnungen Arbeiter und Zeit als miteinander wirkende Ursachen unzertrennlich beysammen bleiben müssen. Es ist auch gut, wenn man die Wirkung durch ein Ziffer sichtbar macht. Das obige Beyspiel wird nun eigentlich so angesetzt und berechnet:

	Tage?	1 Mauer
	Maurer 10	
	Mauer 1	5 Tag
:5	2	18 Maurer
2:		9 Tag

Noch ein solches Beyspiel:

Es werden 8 Schnitter mit einen Acker Weitzen in $2\frac{1}{2}$ Tag fertig; wie viel muß man Schnitter haben daß der Acker in einen Tag geschnitten wird?

Ope-

Operation.

Schnitter?	1 Acker
Tag 1	
	8 Schnitter
Acker 1	= ½ Tag
= 2	
2	5
	4
Antw.	20 Schnitter.

Die Wirkungen können manchmal verschieden seyn. Z. B. Eine Mannschaft von 840 Mann verzehret in 16 Tagen 124 Zentner Fleisch; wie lange werden 560 Mann mit 72 Zentner auskommen?

Operation.

	Tage?	72 Zt.
:8	Mann 560	
		x 6 Tagen
:4	Zt. x = 4	840 Mann
	7	9
	31	4
	217	336
		9
		3024

3024 1/3 13 oder beynahe
217 14 Tage.

854
217
651

203

Bey Zinsrechnungen gehören Kapital und Zeit als Ursachen zusammen, und die Zinsen sind die dadurch hervorgebrachten Wirkungen; denn man kann sagen: Je größer bey der nämlichen Zeit das Kapital ist; je größer werden auch die Zinsen seyn: Ferner, je größer beym nämlichen Kapital die Zeit ist, desto mehr werden auch die Zinsen anwachsen. Z. E. Wie lange muß ein Kapital von 6000 fl. zu 4 procent liegen bleiben, um damit 1200 fl. Interessen zu erobern? Der Ausdruck procent muß allemal beym Ansatz in seine eigentlichen Begriffe zerlegt werden. Es heißt aber 4 procent nichts anders, als daß 100 fl. Kapital in 1 Jahr Zeit 4 fl. Interessen tragen, wo demnach 100 fl. und 1 Jahr unvermeidlich als Ursach von der Wirkung 4 fl. Interessen zusamm gehört.

Operation.

	Jahre?	1200 fl.
:2	fl. 6000	
:4	fl. 4	100 fl. } 1 Jahr }
:3	3	3
		5 Jahre.

Zur

Zur Probe wollen wir untersuchen, ob 6000 fl. wirklich in 5 Jahren 1200 fl. Interessen abwerfen.

fl. ?	6000 fl. 5 Jahren
fl. 100 Jahr 1	4 fl.
	240 5
	1200 fl., was zu erproben.

Oder:

	Kap. fl. ? Jahr 5	1200 fl. Zins
:5		
:4	Zins fl. 4	100 fl. Kap. 1 Jahr
		300 60 100
Antw.		6000 fl.

Bey Rechnungen des Brodsatzes für Bäcker wird der Getreidpreis und das Gewicht des Brodes zusamm den Werth desselben bestimmen: denn, je höher beym nämlichen Brodgewicht der Getreidpreis ist, desto mehr muß auch das Brod gelten: Ferner, je mehr beym nämlichen Getreidpreis das Brod wiegt, desto größer ist auch der Werth dieses Brodes. Z. E. Wenn das Schäffl Weitzen 9 fl. gilt, muß eine Kreutzersemmel 9 Loth 1 Quintl wägen; was muß es wägen, wenn das Schäfft Weitzen 22 fl. 40 kr. gilt?

Ope-

Operation.

{ fl. 22 kr. 40	Loth?	1 kr.	
kr. 1		9 Lt. 1 Qu. 9 fl.	
12	Quintl. 4	1 Loth	Ergänzungen.
fl. 1		60 kr.	
136		37	
2		3	
272		111	
		9	
		999	1/1 3 Loth
		272	
		816	
		183	
		4	4/1
		732	1/1 2 47/68 Quintl.
		272	
		544	
		188	

Bey andern Rechnungsfällen dieser Art kostet es nur allemal eine richtige Beurtheilung, um zu wissen, was Ursache, was Wirkung sey. Wir wollen etliche solche Beyspiele bearbeiten.

I

Ein Fuhrmann führt um eine gewisse Bezahlung 30 Zentner Waare 16 Meilen weit; wie viele Zentner wird er um die nämliche Bezahlung 48 Meilen weit führen?

Es wird hier einleuchtend seyn, daß die Weite des Weges und die Größe der Last miteinander die Bezahlung bestimmen. Weil nun hier die Bezahlung als Wirkung gleich ist, so kann was immer dafür gesetzt werden, und sie wird doch allemal durch Verkleinerung aus dem Ansatze wegfallen. Am natürlichsten wird es seyn, wir setzen, weil es ein und die nämliche Bezahlung ist, 1 dafür an.

Operation.

{ Zt. ? / Meilen 48	1 Bezahlung
Bezahlung 1	30 Zt. / 16 Meilen
:16	
3	10 Zentner.

II

Zu einem Luftballon, brauchte man 13 Ellen Taffet, welcher $\frac{3}{4}$ Ellen breit war. Es soll nun ein gleich großer von einem andern Taffet, der nur $\frac{2}{3}$ Ellen breit ist, gemacht werden, wie viel braucht man da Ellen in der Länge?

Da

Da die Größe des Ballons sowohl von der Länge als Breite des Taffets abhängt, so müssen Länge und Breite als bestimmende Ursachen beysamm bleiben.

Operation.

{ Ellen Länge? Ellen Breite $\frac{2}{3}$	1 Ballon
Ballon 1	1 3 Ellen Länge } $\frac{3}{4}$ Ellen Breite }
4	3
8	39
	3
	3 5 $\frac{1}{1}$ 14 $\frac{5}{8}$ Ellen.
	x x y
	8 8

III

Ein vermöglicher Mann leihet einem andern 500 fl., ohne einen Zins zu fordern, welcher auch nach 3 Monaten richtig bezahlte. Nach einiger Zeit befand sich der letztere wieder in guten Umständen. Jener hatte ein Unglück, und bekam gleichfalls von diesem 150 fl. ohne Zins zu leihen; wie lang darf er diese Summe behalten, damit der zweyte Liebesdienst eben so groß werde als der erste?

Je mehr man Geld ohne Zins auslehnt, und je länger man dasselbe in fremden Händen läßt, desto größer ist ohne Zweifel der Liebesdienst; daher gehören Geld und Zeit zusamm, und der gleichseynsollende Liebesdienst kann beyderseits durch 1 ausgedrückt werden.

Operation.

{ Monat?		1 Liebesdienst
{ x 5 ø fl.		
Liebesdienst	1	3 Monat }
:3	3	5 ø ø fl. }
:5		10 Monat.

Aus diesen wenigen Beyspielen läßt sich so ziemlich auf andere schließen, welche hier unmöglich alle angeführt werden können. Jene Fälle muß ich kurz noch durch ein Exempel rügen, wo auch die Wirkung aus mehrern Größen zusammgesetzt ist. Diese Größen sind daher eben so unzertrennlich von der Wirkung, als die Bestimmungen der Ursache. Ein Kanal, der 120 Schuh lang, 30 Schuh breit und 8 tief ist, wird von 200 Personen in 18 Wochen fertig gemacht: wie viel braucht man Personen zu einem andern Kanal, der 300 Schuh lang, 40 breit und 10 Schuh tief ist, wenn er in 24 Wochen fertig werden soll?

Hier gehören zur Wirkung, die unfehlbar der Kanal ist, auch Länge, Breite, und Tiefe; daher können sie eben so wenig davon getrennt werden,

als

als sich Personen und Zeit von der Ursache trennen lassen.

Operation.

{ Personen?	1 Kanal		
{ Wochen 24	300 Schuh lang		
	40 : : : breit		
	10 : : : tief		
	Kanal 1		
	lang 120	200 Personen	
:3	breit 30	18 Wochen	
:8	tief 8		
:6			
:3	4	5	
:4	4	3	
:2	2	50	
:2		25	
		5	
		125	
		5	
		625	Personen.

Indeß giebt es doch in bürgerlichen Rechnungen Fälle, die beym ersten Anblicke bloß die reesische Regel oder Regel Detri zu fordern scheinen; im Grunde aber geometrische oder physikalische Kenntnisse voraussetzen. Z. E. Eine eiserne Kugel, welche 6 Zoll hoch ist, wiegt 33 ℔; wie viel

wird

wird eine andere wiegen, welche 9 Zoll hoch ist? Die reesische Regel würde so ausfallen.

	℔?	1 Kugl
	Kugl 1	9 Zoll
	Zoll 6	3 3 ℔
:3	2	3
		x 1
		9 9 1/1 4 9½ ℔; da sie doch
		2 2 eigentlich 111 ℔ wiegt.

Oder: ein Uhrpendel, wenn es 2 Schuh lang ist, macht in 100 Sekunden 125 Schwingungen; wie viele Schwingungen würde es machen, wenn dieses Uhrpendel 3 Schuh lang wäre?

Wir wollen uns nicht länger aufhalten zu zeigen, wie diese und dergleichen Fälle eigentlich berechnet werden sollen, um so weniger, da unsere Kenntnisse noch nicht dazu auslangen: sondern lieber alle bisher gegebnen Gesetze der reesischen Regel in einen kurzen Ueberblick zusamm fassen.

1) Die äußere Form der reesischen Regel ist ein Senkstrich, und links und rechts untereinander stehende Zahlen.

2) Man fängt links mit der Frage an, schreibt statt der unbekannten Zahl ein x oder ein Fragezeichen hin, oder läßt die Stelle gar leer; dann wird rechts daneben jene Zahl gesetzt, die auf diese Frage Bezug hat; endlich links wieder eine Zahl von gleicher Benennung mit dieser letztern, und so lange fortgefahren, bis rechts eine Zahl erscheint,

die

die die nämliche Benennung mit sich führt, wie anfangs zur Linken hingesetzt worden.

3) Von Brüchen werden die Nenner ausgestrichen und auf die Gegenseite hingesetzt.

4) Gemischte Zahlen werden erst zu uneigentlichen Brüchen reduciert, und dann mit den Nennern wie oben verfahren.

5) Jene Sätze, wo Unterabtheilungssorten vorkommen, werden in die kleinste derselben durch Multiplikation und Einzählung verwandelt, und wofern sich der Name derselben nicht auf der entgegengesetzten Seite befinden sollte, muß die Kette der Sätze ergänzt werden.

6) Wenn beyderseits Nullen vorhanden sind, so werden überall gleich viele ausgestrichen.

7) Wenn zu beyden Seiten mit gleichen Zahlen verkleinert werden kann, so soll man es thun, um die Rechnung theils zu erleichtern, theils abzukürzen.

8) Zuletzt werden die übrigen Zahlen zur Rechten zusamm multipliciert, desgleichen auch zur linken. Am Ende wird das Produkt zur Rechten durch das zur Linken dividiert.

9) Ist gähling nirgends eine Zahl übrig geblieben, so ist die Einheit die Antwort.

10) Ist zwar zur Rechten keine Zahl mehr übrig geblieben, wohl aber zur Linken, so ist die Antwort ein Bruch, der zum Zähler 1 hat.

11) Bey andern bürgerlichen Rechnungen, die nicht mehr von Kauf und Verkauf handeln, muß

acht

acht gegeben werden, was zur Ursache, was zur Wirkung gehört, damit man die zusammgehörigen Glieder nicht trenne.

Fragen.

Woher hat die reesische Regel ihre Benennung? Was versteht man eigentlich unter der resischen Regel? Wie ist der Ansatz bey der reesischen Regel beschaffen? Ein Beyspiel hierüber! Welche Zahlen multipliciren, welche dividieren? Was braucht man für einen wichtigen Vortheil bey der reesischen Regel? Was versteht man unter der Verkleinerung? Wo liegt der Grund dieser Verkleinerung? Was geschieht nach der Verkleinerung? Was ist in Rücksicht der Unterabtheilungsorten zu bemerken? Wie müssen Brüche, wie gemischte Zahlen behandelt werden? Hat diese Behandlung auch Grund? Hat es der Umsetzung der Nenner auch dann nöthig, wenn auf beyden Seiten gleichnennerichte Brüche vorhanden sind, und warum nicht? Machen Fälle, wo man für Geld um Waaren fragt, eine Ausnahm von der ordentlichen Regel? Was ist zuletzt die Antwort, wenn durch die Verkleinerung beyderseits alles aufgeht? Was, wenn zwar rechts alles aufgeht, aber links noch eine Zahl übrig bleibt? Auf was muß bey andern Rechnungsfällen, die nicht mehr den einfachen Kauf und Verkauf angehen, Rücksicht genommen werden? Setzen Sie mir ein Exempel, wo Ursache und Wirkung ersichtlich sind! Was käme da heraus, wenn der Ansatz nach der gewöhnlichen Weise gemacht würde? Was gehören bey Zinsrechnungen als miteinander wirkende Ursachen zusamm, und warum? Was bey Rechnungen des Brodsatzes für Bäcker, und warum? Kann auch die Wirkung aus mehrern Größen zusammgesetzt seyn? Zeigen Sie mir dieß in einem Beyspiele! Giebt es auch bürgerliche Rechnungsfälle, die sich weder durch die reesische Regel, noch durch die Regel Detri meistern lassen, und was ist die Ursache davon?

Exempel.

a) Jemand braucht in 5 Tägen 4 Loth Schnupftobak; was macht dieß in Zeit von 48 Jahren? Ferner, was beträgt dieß in Geld, das Loth zu $2\frac{1}{2}$ kr.?

Operation.

I

	Zt.?	48 Jahren
	1	365 Tag
:5	5	4 Loth
:8	32	1 ℔
	100	1 Zt.
:4	4	73
		6
		438 1/4 Zt. 38 ℔.
		100

II

	fl.?	438 ℔
	1	32 Loth
:2	1	$2\frac{1}{2}$ kr.
:5	60	1
	2	5
:4	12	2 1 9
3	3	7 3
		8
		584 fl.

b) Ein

b) Ein Physiolog fand durch Untersuchung, daß sein Bart, den er sich die Woche zweymal scheeren ließ, allemal den 24igsten Theil eines Zolles lang wachse; wie viele Schuhe wurden ihm von 20 Jahren an bis in sein 92igstes Jahr (denn so alt wurde er) weggeschoren?

Operation.

Schuhe?		7 Z Jahren
1		5 Z Woche
1		Z Male
1		1/Z Zoll
		Z 4
:12	1	Z 1 Schuh
:6		Z 4 6
:2		4 2 6 Schuhe
:2		Z

c) Ein spekulierender Kapitalist möchte gerne in 11 Jahren 4620 fl. an Zinsen erobern, und kann sein Geld nicht höher als zu $3\frac{1}{2}$ procent anlegen, wie groß muß das Kapital seyn?

Operation.

[Kapital fl.?		4 6 2 0 fl. Zinsen
Jahr 1		1 0 0 fl. Kapital]
Zins fl. 3	1/2	1 Jahr
:7		2
:11		6 6 0
		6 0
		2
		1 2 0
		1 0 0
		1 2 0 0 0 fl.

d) Juwelen und Perlen werden in ganz Europa nach holländischem Troygewicht gewogen. Es hält eine Unze 150 Karat, und 1 Karat 4 Gran. Der größte Diamant, den Portugal aus Brasiliens Bergwerken erbeutete, wiegt 11 $\frac{1}{5}$ Unzen oder 1680 Karat. Was würde er nach münchnerischem Gewicht wägen, da 1 Unze 32 holländische Asen hält, und 1 Münchnerpfund 11671 solcher Asen wiegt?

Operation.

Quintl?	X X $\frac{1}{5}$ Unze
1	32 Asen
11671	1 Münchnerpfund
1	32 Loth
1	4 Quintl
5	56
58355	224
	32
	448
	672
	7168
	32
	14336
	21504
	229376 / 58355

3 $\frac{5}{5}\frac{4}{8}\frac{3}{3}\frac{1}{5}\frac{1}{5}$ Quintl, d. i. nicht gar ein Loth.

e) Wenn

e) Wenn ein Kapital von 5140 fl. in 9 $\frac{3}{4}$ Jahren 2255 fl. 10 kr. 2 pf. Zins getragen; zu wie viel procent ist es angelegt worden?

Operation.

	fl. ?	x ∅∅ fl. 1 Jahr
	5140 9 $\frac{3}{4}$	2255 fl. x ∅ kr. 2 pf.
14	pf. 4	1 kr.
:3	60	1 fl.
:6	39	5412422 3341
	13	1804141 1
	514	30069 — 4½ fl.
	13	6682
	1542	26728
	514	3341
	6682	

f) Ein Pfund Apothekergewicht hält in ganz Deutschland 7452 holländische Asen. Jemand liefert 48 Pfund Weinstein nach Münchnergewicht in irgend eine Apotheke, was wird er dort wägen, wenn das Münchnerpfund 11671 holländische Asen hat?

Operation.

	Apoth. ℔ ?	48 Münchner ℔
	1	11671 Asen
:4	7452	1 Apoth. ℔
:3	1863	12
	621	4
		46684

4 6 6 8 4 $\frac{1}{1}$ 7 5 $\frac{109}{021}$ lb.
6 2 1
4 3 4 7
3 2 1 4
6 2 1
3 1 0 5
1 0 9

g) Jemand hatte von einem Juden 684 fl. gegen 5 procent aufgenommen, und kann es erst in 2 Jahren 8 Monaten und 12 Tägen bezahlen; was machen die Zinsen?

Operation.

fl?	684 fl.
	2 J. 8 M. 12 T.
T. 30	1 M.
M. 12	1 J.
J. 1	5 fl.
:5 fl. 100	
:6 6	972
:6 6	162
:2	114
	81
	114
	912
	9234 $\frac{1}{1}$ 92 fl.
	100
	60 $\frac{2}{1}$
	2040 $\frac{1}{1}$ 20 $\frac{2}{5}$ fl.
	100

h) Es

h) Es sollen 540 fl. in Laubthalern zu 2 fl. 45 kr., oder $= 2\frac{3}{4}$ fl. bezahlt werden, wie viel braucht man dazu?

Operation.

Laubthaler?	540 fl.
fl. $2\frac{3}{4}$	1 Laubthaler
$\frac{4}{11}$	4
	2160 $\frac{1}{1}$ 196 $\frac{4}{11}$ Laubth.

11
106
11
99
70
11
66
4

i) Was machen aber $\frac{4}{11}$ Laubthaler in Scheidemünz?

Operation.

fl.?	$\frac{4}{11}$ Loth
1	11
11	$2\frac{3}{4}$ fl.
4	11
	Antw. 1 fl.

k) Je-

k) Irgend ein Trakteur verkauft von einem fremden Geist sein Gläschen für 2 $\frac{1}{2}$ kr. oder für eine bairische Landmünz. Es machen aber 5 solche Gläschen erst $\frac{1}{2}$ Aechtchen; was gewinnt er an der Maaß, wenn sie ihm selbst auf 1 fl. 12 kr. kömmt?

Operation.

fl. ?		1 Maß
	1	8 Aechtchen
	1	
	$\frac{1}{2}$	5 Gläschen
	1	$2\frac{1}{2}$ kr.
:5		
	5	1 fl.
:4	4	
	2	
	3	2
		(1
	4	$\frac{1}{1}$ $3\frac{1}{3}$ fl. oder 3 fl. 20 kr.
	3	1 12
		Gewinn 2 fl. 8 kr.

l) Zur Abmähung einer Wiese brauchen 7 Mader 5 Täge, wenn sie täglich 4 Stund mähen. Eines Jahres wollen 3 Mader täglich 8 Stund mähen, wann werden diese fertig werden?

Operation.

{ Tag ?		
{ M. 3		1 Wiese
{ St. 8		
		5 T.
:4	W. 1	7 M.
		4 St.
	4	
	2	3(5 $\frac{1}{1}$ $5\frac{5}{6}$ oder beynahe 6 Tage
	6	6

m) Zu

m) Zu einer Mauer, welche 240 Schuh lang, 30 hoch, und 1 $\frac{1}{2}$ dick ist, brauchen 12 Maurer, wenn sie wöchentlich 5 Täg und täglich 8 Stunden arbeiten, 9 $\frac{1}{2}$ Wochen. Wie viel Maurer braucht man zu einer andern Mauer, die 300 Schuh lang 48 hoch und 3 dick wird, wenn sie in 12 Wochen fertig werden sollen, die Woche zu 6 Täge, und den Tag zu 10 Stund gerechnet?

Operation.

Maurer?
W. 12
T. 6
St. 10

300 Schuh lang
48 — — hoch
3 — — dick

240 | 12 Maurer
30 | 9 $\frac{1}{2}$ Wochen
12 $\frac{1}{2}$ | 5 Tag
8 Stund

3 | 19
2 | 8
3 | 4
12(1
76 $\frac{1}{1}$ 25 $\frac{1}{3}$ Maurer.
33

n) Ein Kornjud führt von Müuchen 176 Schäffel Weitzen nach Mannheim. Wie viel wird dort seine Lieferung in Maltern betragen, wenn das Münchnerschäffel 11234, und das Mannheimermalter 5192 Pariserkubikzolle hält?

Operation.

Malter?	176 Münchnerschäffel
1	11234 Pariserkubikzoll
5192	1 Malter
:4	
1298	44
:2	
649	5617
	44
	22468
	22468
	247148 | 1 / 1 380 528/649 Malter.
	649
	1947
	5244
	649
	5192
	528

o) Wie

o) Wie viel wird man in ein Weinfaß, das 48 baierische Eimer zu 60 Maaß hält, Getraid bringen können, da bekanntlich das hiesige Schäffel 208 $\frac{1}{2}$ baierische Getränkmaß faßt?

Operation.

Schäffel?	48 Eimer
1	60 Maaß
208 $\frac{1}{2}$	1 Schäffel
417	2
139	16

:3

32
60

1920 $\frac{1}{1}$ 13 Schäffel.
139

530
139
417

113
6
---
678 $\frac{1}{1}$ 4 $\frac{122}{139}$ Metzen.
139
556

122

p) Nach

p) Nach Beckmanns Untersuchung wiegen 149 todte Bienen ein Loth (hanöver'sches Gewicht) Wie viel solcher Bienen würden auf ein Münchnerloth gehen, da das Münchnerpfund 11647, und das Hanoverpfund 10127 holländische Asen wiegt?

Operation.

Bienen?	1 Münchnerloth
℔	1. Pfund
1	11647 Asen
10127	1 Hanoverpfund
1	℔ Loth
x	149

104823
46588
11647

1735403 $\frac{1}{1}$ 171 Bienen nebst einem Bruch.

10127

72270
10127
70889

13813
10127

3686

q) Man rechnet einen starken Bienenschwarm auf 20000 Bienen, was wird er ohne Korb und Bodenbret nach Münchnergewicht wägen?

Operation.

℔ ?	20000 Bienen
171	1 Loth
32	1 Pfund

20000 | 171 — 116 | 32 — 3 Pfund 20 $\frac{164}{171}$ Lothe

171 — 32

290 — 96

171 — 20

1190

171

1026

164

§. 10.

Von der Gesellschaftsrechnung.

Bey Vertheilungen, wo die Theile nicht gleich werden dörfen, sondern sich nach andern obwaltenden Umständen richten müssen, braucht man die Gesellschaftrechnung. Sie ist demnach nichts anders, als eine Anweisung, die Theile eines Ganzen so zu bestimmen, daß ihre Größe eben so verschieden ausfällt, wie gewisse zum Grund gelegte Zahlen sind. Setzen wir, Albert und Christian haben sich zum Spielen messingene Rechenpfenninge gekauft. Albert

gab

gab 3 kr. dazu her, und Christian 6 kr. Nehmen wir an, sie haben für ihre 9 kr. 72 Rechenpfennige erhalten; wie viel darf jeder zu sich nehmen? Es ist natürlich, daß weil Christian noch so viele Kreutzer als Albert dazu hergegeben, er auch noch so viele Rechenpfennige bekommen müsse. Dieß kann aber leicht durch zween Regeldetriansätze geschehen, wenn man nämlich sagt: 1) Die Summe des hergegebnen Geldes 9 kr. bekommt 72 Rechenpfennige; was bekommen 3 kr.? Antwort 24 Rechenpfennige. 2) Die Summe von 9 kr. bekömmt 72 Rechenpfennige; was bekommen 6 kr.? Antwort 48 kr. Will man aber lieber die reesische Regel anwenden, so geht die Sprechform so: Wie viel Rechenpfennige bekömmt man für 3 kr., wenn man für 9 kr. 72 bekömmt? u. s. f. Die Probe erscheint dadurch, wenn die Theile zusammgenommen das Ganze in der Addition genau wieder geben.

Es müssen demnach allemal jene Zahlen, nach welchen sich die Theile zu richten haben, addiert werden, so kann man die Regel Detri oder reesische Regel so oft wiederholen, als Zahlen vorhanden sind.

Manchmal soll sich jeder Theil nach zwoen zum Grund liegenden Zahlen richten. In diesen Fällen muß man allemal zwo und zwo solcher Bestimmungszahlen miteinander multiplicieren und erst dann die Produkte addieren; das übrige Geschäft geht wie oben fort. Ein Beyspiel hierüber.

Drey junge Herrn, Karl, Wilhelm und Arnold erhielten Erlaubniß Kaninchen halten zu dörfen. Karl kaufte sich vier, und ließ sie bey einer Landwirthinn 3 Wochen lang futtern, Wilhelm 6 auf

4 Wo=

4 Wochen und Arnold 9 auf 2 Wochen lang. Die Futterkösten betrugen zulezt 6 fl.; was muß jeder dazu hergeben?

Operation.

4	6	9	
3	4	2	
12	24	18	Es ist al-
24			so einerley ob die Landwirthinn 12,
18			24 und 18 Kaninchen eine Woche
54			gefuttert, oder die 4, 6 und 9 Ka-

ninchen 3, 4 und 2 Wochen; folglich ist die Verfahrungsart gerechtfertigt.

I

fl. ?			
8	4	6	fl.
	9	2	
	3	2	
		(1	
		4 1/1	1 fl. 20 kr.
		3	

:6
:3

II

fl. ?			
8	4	4	
	9	6	
	3	4	
		2	
		(2	
		8 1/1	2 fl. 40 kr.
		8	

:6
:3

III

III

fl. ? | x 8
3 4 | 6
6 | 2 fl.

:9

probe.

1) 1 fl. 20 kr.
2) 2 40
3) 2 —
6 fl. — kr.

Fragen.

Wann hat man Gesellschaftrechnung nöthig, und was ist sie eigentlich? Wie werden Gesellschaftrechnungen behandelt? Wie wird die Probe davon gemacht? Was giebt es für besondere Fälle der Gesellschaftrechnung? Wie muß hier zu Werke gegangen werden? Wie läßt sich diese Verfahrungsart in dem nächsten beßten Beyspiele rechtfertigen?

Exempel.

a) Drey Geschwisterte Johann, Georg und Sophie bekamen von ihrem Vätter einen Korb voll Borsdorferäpfel, mit dem Bedinge, daß sie ihn nach ihren verschiedenem Alter unter sich vertheilen sollen. Johann ist 14, Georg 11, und Sophie 9 Jahr alt. Wie viel erhält jedes Aepfel, da es in allem 180 Stücke sind?

Operation.

1 4
1 1
9
34

I

Aepfel? | x 4 Jahre

3 4 | 1 8 0
1 7 | 7

:2

1 2 6 0 1/1 7 4 2/17 Aepfel.
1 7
1 1 9
7 0
1 7
6 8
2

II

Aepfel? | 1 1 Jahre

3 4 | x 8 0
1 7 | 9 0

:2

9 9 0 1/1 5 8 4/17 Aepfel.
1 7
8 5
1 4 0
1 7
1 3 6
4

III

Aepfel? | 9 Jahre

3 4 | 1 8 ø

1 7 | 9 o

8 1 o : 4 7 $\frac{11}{17}$ Aepfel.

1 7

6 8

1 3 o

1 7

1 1 9

1 1

Probe.

7 4 $\frac{2}{17}$

5 8 $\frac{4}{17}$

4 7 $\frac{11}{17}$

1 8 o Aepfel.

b) Ein andersmal schossen sie Geld zusamm, und versuchten ihr Glück in der Lotterie. Sie gewannen 75 fl. Was trift jeden, da Johann 10 kr., Georg 36 kr. und Sophie 14 kr. dazu hergab?

Operation.

1 o

1 4

3 6

6 o kr.

I

		fl. ?	x	ø	kr.	
	kr.	6	ø	7	5	fl.
:		2		(1		
			2	5	1/1 1	2 1/2 fl.
			2	2		

II

		fl. ?	3	6	kr.	
	kr.	6	ø	7	5	fl.
: 5		x	2	1	5	
: 12					3	
					4	5 fl.

III

		fl. ?	x	4	kr.	
	kr.	6	ø	7	5	fl.
: 2		3	ø		7	
: 5			6	x	5	
: 3		2			5	
				x	(1	
				3	5 1/1	1 7 1/2 fl.
				2	2	

Probe.

1	2	1/2
4	5	
1	7	1/2
7	5	fl.

c) Drey Handelsmänner schießen zu einer Spekulation Geld zusamm. A giebt 540 fl., B 600 fl., und C 750 fl. Ihr Gewinn beläuft sich auf 1200 fl., was trift jeden, da A sein Geld in 4 Monat, B in 6 Monat, und C in 10 Monat zurück nahm?

Operation.

A	B	C
540	600	750
4	6	10
2160	3600	7500
3600		
7500		
13260		

I

fl.?		2 x 60
x 3260		1200
:2		
663		x 08
:3		
221		36
		1200
		72
		36
		43200 / 195 fl.
		221
		2110
		221
		1989
		1210
		221
		1105
		105
		60
		6300

6 3 0 0 $\frac{1}{1}$ 2 8 $\frac{112}{221}$ fr.
2 2 1
4 4 2
1 8 8 0
2 2 1
1 7 6 8
1 1 2

II

fl. ? | 3 6 0 0
1 3 2 6 0 | 1 2 0 0
:2 | 1 8 0
6 6 3 | 6 0
:3 | 7 2 0 0 0 $\frac{1}{1}$ 3 2 5 fl.
2 2 1
6 6 3
5 7 0
2 2 1
4 4 2
1 2 8 0
2 2 1
1 1 0 5
1 7 5
6 0
1 0 5 0 0 $\frac{1}{1}$ 47 $\frac{113}{221}$ fr.
2 2 1
8 8 4
1 6 6 0
2 2 1
1 5 4 7
1 1 3

III

fl. ? | ℔ ß ø ø

X ʒ 2 6 ø | I 2 0 0

:2 — 6 6 ʒ | ʒ ℔ ß

:3 — 2 2 I | I 2 5

I 2 0 0

2 5 0

I 2 5

I 5 0 0 0 0 | 1/1 6 7 8 fl.

2 2 I

I 3 2 6

2 2 I

I 5 4 7

I 9 3 0

2 2 I

I 7 6 8

I 6 2

6 0

9 7 2 0 | 1/1 43 217/221 kr.

2 2 I

8 8 4

8 8 0

2 2 I

6 6 3

2 I 7

probe.

A	I	9	5	fl.	2	8	112/221	kr.
B	3	2	5		4	7	113/221	
C	6	7	8		4	3	217/221	
	I	2	0	0 fl.		—		

d) Als

d) Albrecht ließ an seinem Geburtstage die zween Söhne eine Stunde lang Schach spielen, und bestimmte einen Dukaten zu 5 fl. als Preis. Die Stunde war vorüber, und das Spiel blieb unvollendet. Nun beschloß der Vater, den Preis nach der Anzahl der gegebnen Schache zu theilen. Wilhelm hatte 11mal und Karl 4mal Schach au den König gegeben, wie viel trift jeden?

Operation.

11
4
---
15 Schache.

I

fl. ? | 11 Sch.
x 5 | 5
3 | (2
x x 1/1 3 fl. 40 kr.
| 3

:5

II

fl. ? | 4 Sch.
x 5 | 5 fl.
3 | (1
4 1/1 1 fl. 20 kr.
| 3

:5

Pro-

Probe.

1)	3 fl.	40 kr.
2)	1	20
	5 fl.	—

Berichtigung.

Seite 64 in der Mitte soll es statt $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ Schuh oder 3 Zoll so heißen: $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ Schuh oder $4\frac{1}{2}$ Zoll.

1.

Johann Georg Prändels

öffentlichen Repetitors der Mathematik auf dem chur-
fürstl. Schulhause zu München

Kugldreyeckslehre

und

höhere Mathematik

sammt

ihrer kleinen Geschichte.

Mit 4 Kupfertafeln.

München, 1794.
Bey Joseph Lentner.

Nro 1313.

Kugldreyeckslehre und höhere Mathematik. Von Joh. Georg Prändl, Repetitor.

Imprimatur.

München im churfürstl. Bücher-censur-Collegium, den 10ten August 1793.

Regist. Fol. 173.

F. X. Graff,
wirkl. Rath und Sekretär.

Vorrede.

Wie vielen und namhaften Schwierigkeiten die alltägliche Forderung unterworfen sey, in irgend einem Fache die schicklichste Mittelbahn zu treffen, liegt schon bey dem unbedeutensten Geschäfte zu hell am Tage, als daß so etwas erst von Bearbeitern mathematischer Lehrgebäude zum voraus erwähnt werden dörfte. Man soll sich, so viel möglich, auf Kürze befleißigen; und doch dabey weder Vollständigkeit des Systems, noch faßlichen Vortrag aus den Augen lassen. Reine Mathematik, heißt es ferner, muß immer das Gepräge der strengen Theorie ohne Anwendung behaupten; und doch dabey nicht in gar zu abstrakte Trockenheit verfallen. In der höhern Geometrie scheint zu Erlangung eines tiefern Blickes in die geheimen Verhältniße der Linien untereinander nichts

zuträg-

zuträglicher zu seyn, als die Eigenschaften der Kurven unmittelbar aus ihren Gesetzen kennen zu lernen; aber es darf dabey nicht vergeßen werden, den Anfängern der Analyse in dem hier, so zu reden, eigen dazu angewiesnem Felde zu zeigen, wie nun endlich von den Sätzen der Differential- und Integralrechnung überall häufiger Gebrauch gemacht werden könne; damit sie uns nicht mit gutem Fuge vorwerfen müssen, sie hätten sich der Erlernung derselben umsonst unterzogen. Schon die Beweisführungen für sich allein, sollen sie je den ohnehin schüchternen Kandidaten der Mathematik gleich beym ersten Anblick nicht vollends zurückschrecken, verlangen in präciser Form dargestellt zu werden; indeß sein ungeübter Verstand beym Durchstudieren nichts sehnlicher, als die umständlichste Auseinandersetzung aller Bestandtheile derselben erwartet. Ich beherzigte sie wohl diese drey Punkte, und hatte sie bey der Bearbeitung dieses Werkes stäts vor Augen: in wie fern sie Einfluß auf einen gewünschten Mittelweg hatten, erwarte ich von dem Ausspruche unpartheyischer Kenner.

Man

Vorrede.

Man mag mir etwa vorwerfen, ich hätte mich zu viel mit Anwendung der Differential- und Integralrechnung abgegeben. Aber wenn man bedenkt, daß dieß mit guter Absicht geschah, um nämlich fürs erste Gelegenheit zu geben, sich mehr in dem edelsten Zweige der Mathematik zu üben, welches bis daher in so wenigen Lehrbüchern noch geschehen ist; und zweytens, um auf doppeltem Wege zur Wahrheit zu gelangen, wodurch ebenfalls wieder die Richtigkeit der Rechnung des Unendlichen dargethan wird; so, denke ich, verliert der Einwurf viel, wo nicht das Meiste von seinem Gewichte. Indeß können die meisten derselben von jedermann, der weitläuftigen Kalkulierungen abholde ist, des Systemes unbeschadet, auch weggelassen werden.

Was ich in Hinsicht der allgebraischen Beweisarten, der Ordnung, der Geschichte, der Vollständigkeit, der Veranlassung zur Herausgabe, u. d. gl. noch zu sagen hätte, ist schon in der Vorrede zu meiner Elementargeometrie gemeldet worden, und braucht also dießmal keiner Erwähnung mehr.

Ich

Vorrede.

Ich schmeichle mir, daß man manches Neue in selben finden wird, und daß das Werk durchgehends nach eignem Zuschnitte, vorzüglich in Rücksicht der vielen Beyspiele, die ich alle selbst entworfen, und sehr mühsam durchrechnete, bearbeitet worden. Freunde der guten Sache werden meine Arbeit gewiß nicht mißkennen, und habe ich einmal den Beyfall von dieser bessern und edleren Menschenklasse, o dann gebe ich mich gerne zufrieden, und bin taub zu dem Gekrächze der übrigen misantropischen Rabengeschöpfe.

Schriebs

München den 3ten August 1793.

Der Verfasser.

Ueberblick

der in diesem Bande abgehandelten Materien.

Kugldreyeckslehre.

Seite

1) Vorbegriffe I

2) Nähere Sätze zur Berechnung der Kugldreyecke, und zwar der rechtwinklichten IV

3) Von schiefwinklichten Kugldreyecken . . . XII

4) Eine abgezogene Anweisung aus den gegebenen geographischen Längen und Breiten zwoer Oerter, ihre Entfernung von einander zu finden . . . XXII

Höhere Mathematik.

1) Von veränderlichen und beständigen Größen, und von den Funktionen 2

2) Vorbegriffe vom Unendlich-Großen und Kleinen . 5

3) Differentialrechnung 10

3) Etwas vom größten und kleinsten Werthe der Funktionen, als eine vorläufige Anwendung der Differentialrechnung 20

Integralrechnung 25

Einige vorläufige Anwendungen der Integralrechnung 30

Seite

Höhere Geometrie.

Vorbegriffe der nothwendigsten Hilfslinien . . . 40
Von Kegelschnitten 44
Von der Parabel 44
Von der Ellipse 80
Von der Hyperbel 136
Von der Logistik oder der logarithmischen Linie . . 171
Von der umgekehrten Methode der Tangenten . . 185
Geschichte der Kugldreyeckslehre 191
Geschichte der höhern Mathematik 194

Kugel-

Kugeldreyeckslehre.

Vorbegriffe.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Wissenschaft, aus drey gegebnen Theilen eines Kugeldreyecks die übrigen durch Rechnung zu bestimmen.

§. 2. Erkl. Ein Kugeldreyeck ist ein von drey Bögen gröster Zirkel auf der Oberfläche der Kugel eingeschloßner Raum.

§. 3. Zusatz. Diese Lehre unterscheidet sich von der ebnen Trigonometrie dadurch, daß die Dreyecke in keiner Ebne, sondern auf der Kugelfläche liegen, und daß die gegebnen Stücke auch drey Winkel seyn können.

§. 4. Zusatz. Daß die Seiten eines solchen Kugeldreyecks Bögen gröster Zirkel seyn müssen, die einerley Diameter haben, wird daraus begreiflich, weil nur in diesem Falle eine Vergleichung der trigonometrischen Linien statt haben kann.

§. 5. **Lehrsatz.** Jeder gröste Zirkel theilt die Kugel in zween gleiche Theile.

Beweis. Es ist in der Geometrie erwiesen, daß jede gerade Linie, die durch den Mittelpunkt eines Zirkels geht, denselben in zween gleiche Theile theile; was dort von Linien gilt, das gilt bey Körpern von ihren abstammenden Flächen; nun die Fläche eines grösten Zirkels geht durch den Mittelpunkt der Kugel, also theilt er sie in zween gleiche Theile.

§. 6. **Lehrsatz.** Zween gröste Zirkel theilen sich in gleiche Theile.

Beweis. Erwiesen ist, daß sich zwo gröste Sehnen eines Planzirkels in zween gleiche Theile theilen. Man kann sich aber diese Sehnen als Durchmesser neuer Zirkel vorstellen, die in was immer für einer Richtung durch die Ebne gelegt sind; folglich müssen sich auch diese sowohl in Rücksicht der Peripherien, als der Flächen halbieren.

§. 7. **Zusatz.** Wenn sich nun zwo schneidende gröste Kugelflächen im Mittelpunkte der Kugel begegnen, so entsteht eine Neigung wovon die Bögen die Gränzen sind. Diese Flächenneigung nun oder Bögenneigung heißt ein sphärischer Winkel.

§. 8. **Lehrsatz.** Wenn die Schenkel eines sphärischen Winkels bis zu jenem Vertikalbogen fortgeführt werden, der 90° vom Winkel entfernt ist, so bestimmt dieser abgeschnittne Bogen das Maas des Winkels.

Satz. Fig. 1

df = o

Beweis.

Beweis.

dcf = df denn dieser Bogen ist aus dem Scheitelpunkte beschrieben.

aber dcf = o wegen einerley Neigung

also df = o

§. 9. **Erkl.** Der Pol eines Zirkels heißt jener Punkt auf der Kugel, welcher auf allen Seiten vom Zirkel gleich weit, oder 90° entfernt ist, weil hier nur von grösten Zirkeln die Rede ist.

§. 10. **Zusatz.** Da auf der entgegengesetzten Seite der Kugel auch ein solcher Punkt möglich ist, so hat jeder gröste Zirkel zween Pole.

§. 11. **Zusatz.** Die gerade Linie von einem Pole zum andern muß nothwendig ein Diameter der Kugel seyn; weil sie 180° von einander entfernt sind.

§. 12. **Lehrsatz.** Ein Zirkel, der durch die Pole eines andern geht, durchschneidet ihn perpendikulär.

Beweis. Die Flächenneigungen sind aus der Bedingung des Pols §. 9 beyderseits einander gleich, und zwar 90°, also schneidet ein solcher Zirkel den andern unter einem rechten Winkel, das ist perpendikulär.

§. 13. **Lehrsatz.** Die sphärischen Nebenwinkel machen zusamm 180°, und die Vertikalwinkel sind gleich.

Beweis. Die sphärischen Winkel kommen mit den Neigungsflächen ihrer Zirkel übereins;

für diese nun gelten die Beweise der Planimetrie, also auch für jene.

§. 14. Erkl. Es giebt zweyerley Kugeldreyecke. Rechtwinklichte und schiefwinklichte. Von der ersten Gattung sind sie, wenn sich ein oder mehrere rechte Winkel darin vorfinden, im widrigen Falle gehören sie zur andern Gattung. Die Benennungen der Seiten in rechtwinklichten Dreyecken ist die nämliche wie bey Ebnen. Wenn die Lothen oder Perpendikel beyde entweder mehr oder weniger als 90° halten, so heissen sie gleichartig.

§. 15. Lehrsatz. Es kann keine Seite 180°, oder darüber halten.

Beweis. Die Seiten sind Bögen gröster Zirkel. Diese schneiden sich in ihrer Mitte, das ist in einer Entfernung von 180° §. 6. Schneidet nun ein dritter Bogen, wo, und wie er will die zween Halbbögen zu einem Kugeldreyecke, so giebt es Theile von selben; also kann nirgend ein Halbzirkel die Seite zu sphärischen Dreyecken werden.

Nähere Sätze zur Berechnung der Kugeldreyecke und zwar der rechtwinklichten.

§. 16. Erkl. Man kann in einem rechtwinklichten Dreyecke, mit Wolfen mittlere, anliegende und abgesönderte Theile betrachten. Mittlere Theile sind die, welche lediglich zwischen zwey andern Theilen liegen. Diese Theile, zwischen welchen sich der mittlere Theil befindet, heissen die anliegenden. Was aber weder ein mittlerer Theil, noch ein anliegender heissen kann, dieß nennt man abgeson-

gesonderte; wo der rechte Winkel nie darunter gezählt werden darf. Wenn schiefwinklichte Dreyecke durch einen Perpendikel in zwey rechtwinklichte zerfällt werden, so läßt sich auch dort diese Eintheilung anbringen. In jedem rechtwinklichten Dreyecke giebt es fünf Fälle, wenn nämlich jedesmal ein anders von den fünf Stücken, — den der rechte Winkel ist abgerechnet, — als mittlerer Theil betrachtet wird. Z. B. Fig. 2

Mittlere.	Anliegende.	Abgesönderte.
1) a b	a c , b	b c , c
2) b	a b , b c	a c , c
3) b c	b , c	a b , a c
4) c	b c , a c	b , a b
5) a c	c a b	b c , b

§. 17. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinklichten Kugeldreyecke verhält sich der Radius zum Sinus der Hypothenuse, als wie der Sinus eines schiefen Winkels zum Sinus der überstehenden Seite.

Satz. Fig. 3

$$r : \sin a d = \sin d : \sin a f$$

Beweis.

Man ziehe die gehörigen Linien, so werden sie ein rechtwinklichtes ebnes Dreyeck vorstellen, worinn

$$\sin b : a c = \sin m : a b$$

subst. $r : \sin a d = \sin d : \sin a f$

§. 18.

§. 18. **Anmerk.** Der Beweis läßt sich noch anders führen, aber dieser däucht mir der kürzeste und natürlichste zu seyn.

§. 19. **Anmerk.** Kraft dieses Lehrsatzes wären wir wirklich schon im Stande so manche Aufgabe zu lösen: doch brauchen wir ihn hier nur zur Einleitung zweyer Hauptregeln, nach welchen alle Fälle berechnet werden können.

§. 20. **Lehrsatz.** **Wenn man mit Wolfen die Komplemente der Perpendikel für die Perpendikel selbst setzt, so gleicht allemal das Produkt aus dem Radius in den Kosinus des mittleren Theils dem Produkte der Sinusse der abgesonderten Theile. Der Fall ist dreyfach: 1) Wenn die Hypothenuse 2) einer von den Perpendikeln 3) ein schiefer Winkel der mittlere Theil ist**

I Satz. Fig. 4

$$r \times \text{cos}\, ac = \text{sin}\, cd \times \text{sin}\, bg$$

Beweis.

Man ergänze die Bögen zu Quadranten, so geben die Komplemente ein neues rechtwinklichtes Dreyeck ab, weil a der Pol des Quadranten dg folglich des ganzen Zirkels ist, wo sich für die Winkel bey g und f keine andere Maase als die Entfernung vom Pol bis zum Zirkel, das ist, Quadranten beschreiben lassen. Es ist demnach in dem Dreyeck cdf

$$\text{sin}\, f : \text{sin}\, dc = \text{sin}\, d : \text{sin}\, cf$$

oder

$$r : \text{sin}\, dc = \text{sin}\, bg : \text{cos}\, ac$$

$$r \times \text{cos}\, ac = \text{sin}\, cd \times \text{sin}\, bg$$

II Satz.

III Satz.

r X cos bg = sin ac X sin c

Beweis.

In dem Dreyecke abc selbst ist

sin b : sin ac = sin c : sin ab
oder r : sin ac = sin c : cos bg
r X cos bg = sin ac X sin c

III I Satz.

r X cos a = sin c X sin de

Beweis.

Es sey alles wie vorhin, so ist

sin o : sin df = sin f : sin de
oder sin c : cos a = r : sin dc
r X cos a = sin c X sin dc

§. 21. Zusatz. Weil jeder Theil des Dreyecks — ausser dem rechten Winkel — ein mittlerer Theil seyn kann, so giebt dieser Lehrsatz 5 Gleichungen. Sie heissen

1) r X cos ac = sin ab X sin bc
2) r X cos ab = sin ac X sin c
3) r X cos bc = sin a X sin ac
4) r X cos a = sin c X sin bc
5) r X cos c = sin a X sin ab

weil ferner in jeder Gleichung ein jedes der dreyen Glieder unbekannt seyn kann, so läßt sich auch jede Gleichung auf 3 Fälle nutzen, welches in allem 15 Fälle giebt. Ein fruchtbarer Lehrsatz!

§. 22.

§. 22. **Anmerk.** Eine kleine Anwendung auf die gemeine Astronomie soll diese Fälle in etwas erläutern. Es ist bekannt daß der Aequator, die Ekliptik und der Meridian gröste Zirkel der Weltkugel sind. Weil nun der Meridian überall durch den Pol des Aequators beschrieben wird, so schneidet er diesen rechtwinklicht. Der Winkel, welchen der Aequator mit der Ekliptik macht, heißt die Schiefe der Ekliptik; ein Stück oder Bogen des Aequators zwischen der Schiefe und einem Meridian heißt die Rectascension der Sonne, oder die gerade Auffsteigung; der Bogen der Ekliptik zwischen der Schiefe und dem Meridian, giebt den Ort der Sonne, oder ihre Vorrückung, der Bogen des Meridians zwischen der Ekliptik und dem Aequator ist die Deklination der Sonne, und der zweyte schiefe Winkel wird der Meridianwinkel genennt. In unsrer 4ten Figur dörfte e die Schiefe, b c die Rectascension, a b die Deklination, a den Meridianwinkel, und a c den Ort der Sonne vorstellen.

§. 23. **Aufgabe.** Es sey die Declination der Sonne $12^{\circ}33'$, wie weit ist selbe in der Ekliptik bereits vorgerückt?

Auflösung Weil die Schiefe der Ekliptik schon als bekannt vorausgesetzt wird, und $23^{\circ}29'$ beträgt, so nehme man die Deklination als einen mittleren Theil an, und dann werden die Vorrückung und die Schiefe abgesonderte Theile seyn.

$$r \times \sin ab = \sin ac \times \sin c$$

$$r \times \sin ab = \sin ac$$

$$\sin c$$

$$\text{Log } r + \sin ab = 19{,}3364749$$

$$\text{Log } \sin c \quad 9{,}6004090$$

$$9{,}7360659 = \text{Log } \sin 33^{\circ}$$

§. 24. **Anmerk.** Ich habe deßwegen *sin ab* gesetzt, weil a b ein Perpendikel ist; folglich sein Komplement dafür genommen wird. Der Kosinus des Komplements aber ist nichts anders als der Sinus des Perpendikels.

§. 25. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinklichten Kugeldreyecke verhält sich die Tangente eines Winkels zum Radius, wie die Tangente des überstehenden Perpendikels zum Sinus des andern Perpendikels.

Satz.

Satz. Fig. 5

tang b : r = tang g d : sin d b

Beweis.

Die △ k c h ∽ △ f a d wegen rechten, und gleichen Neigungswinkeln

also k h : h c = f d : d a

subst. tang b : r = tang g d : sin d b

§. 26. **Lehrsatz.** Das Produkt aus dem Radius in den Sinus eines Perpendikels ist gleich dem Produkt aus der Tangente des andern Perpendikels in die Kotangente des überstehenden Winkels.

Satz. Fig. 5

r X sin d b = tang g d X cot b

Beweis.

tang b : r = tang g d : sin d b

aber tang b : r = r : cot b §. 30 eb. Trig.

r : cot b = tang g d : sin d b

r X sin db = tang g d X cot b

§. 27. **Anmerk.** Beyde Beweise und Lehrsätze hätten wegbleiben, und in den Beweis des folgenden Lehrsatzes mit unter gewebt werden können; aber ich wollte sie gefliissentlich aussetzen, theils die Beweise abzukürzen, theils mehrere Formeln zu tieferen Spekulationen zu gewinnen.

§. 28. **Lehrsatz. Wenn man mehrmal mit Wolfen für die Perpendikel ihre Komplemente nimmt, so ist allemal in rechtwinklichten Kugeldreyecken das Produkt aus dem Radius in dem Kosin des mittleren Theils gleich dem Produkt**

der

der Kotangenten der anliegenden Theile. Der Fall ist ebenfalls dreyfach: 1) Wenn ein Schenkel 2) ein Winkel 3) die Hypothenuse ein mittlerer Theil ist.

I Satz Fig. 4

$$r \times \text{cof } c\,d = \text{cot } c \times \text{cot } b\,g$$

Beweis.

In dem Dreyecke a b c ist nach §. 26

$$r \times \text{sin } b\,c = \text{cot } c \times \text{tang } a\,b$$

subst. $r \times \text{cof } c\,d = \text{cot } c \times \text{cot } b\,g$

II Satz.

$$r \times \text{cof } a = \text{cot } a\,c \times \text{cot } b\,g$$

Beweis.

Im Dreyeck der Komplimentsbögen ist

$$r \times \text{sin } d\,f = \text{tang } c\,f \times \text{cot } d \quad \text{§. 26}$$

oder $r \times \text{cof } a = \text{cot } a\,c \times \text{cot } b\,g$

III Satz.

$$r \times \text{cof } a\,c = \text{cot } a \times \text{cot } c$$

Beweis.

Es ist wieder in dem Dreyeck der Komplementsbögen

$$r \times \text{sin } c\,f = \text{tang } d\,f \times \text{cot } c$$

oder $r \times \text{cof } a\,c = \text{cot } a \times \text{cot } c$

§. 29. Zusatz. Aus diesem Lehrsatze können wiederum 5 Gleichungen, und in allem wie oben 15 Fälle abgeleitet werden. Z. B.

1) r X cos a c = cot a X cot c
2) r X cos b c = cot c X cot a b
3) r X cos a b = cot a X cot b c
4) r X cos a = cot a b X cot a c
5) r X cos c = cot a c X cot b c

§. 30. Zusatz. Beyde Universalregeln lassen sich in diesen einzigen Ausdruck zusamm ziehen: Das Produkt aus dem Radius in den Kosinus des mittleren Theils ist gleich dem Produkt, entweder aus den Kotangenten der anliegenden, oder aus den Sinussen der abgesonderten Theile.

§. 31. Aufgabe. Die gerade Aufsteigung beträgt $39°22'$, wie groß ist die Deklination der Sonne?

Auflösung. Weil die gerade Aufsteigung Fig. 4 der mittlere Theil = b c, die beyden anliegenden aber die Schiefe der Ekliptik = c, und die Deklination = a b = x ist, so ist die Gleichung logarithmisch ausgedrückt

Log sin tot + Log sin b c = Log cot c + Log tang x
Log sin tot + Log sin $39°22'$ = Log cot $23°29'$ +
Log tang x

Log sin tot = 10,0000000
Log sin $39°22'$ = 9,8022816

19,8022816
Log cot $23°,29'$ 10,3620437

9,4402379 = Log tang x

welcher Tangente ein Bogen von $16°24'$ zugehört, und hier die Größe der Deklination angiebt.

§. 32. **Anmerk.** Da b c und x Perpendikel sind, und Kosinus und Kotangente der Komplementsbogen, die hier genommen werden müssen, nichts anders als Sinus und Tangens der wahren Bögen vorstellen, so sind sin b c und Tang x rechtmäßige Ausdrücke in obiger Gleichung.

§. 33. **Anmerk.** Auf diese Art lassen sich alle Aufgaben die in rechtwinklichten Dreyecken vorkommen können, auflösen.

Von schiefwinklichten Kugeldreyecken.

§. 34. **Erkl.** Ein schiefwinklichtes Kugeldreyeck wird in zwey rechtwinklichte zerfällt, wenn aus einem der Winkel auf die gegenüberstehende Seite ein Perpendikel, das ist, ein Vertikalbogen herabgefällt wird, wo auch manchmal die Seite verlängert werden muß.

§. 35. **Zusatz.** Es lassen sich also durchaus die beyden oben gegebnen Regeln, die wir auch endlich §. 30 in eine einzige zusamm gezogen haben, bey schiefwinklichten Dreyecken ebenfalls anwenden. Es kömmt alles dabey auf die geschickteste Art an, mit der man zu Werke geht.

§. 36. **Aufgaben.** 1) Aus Winkeln und Seiten, die einander entgegen stehen, ein viertes Stück zu finden. 2) Aus einer Seite und den darauf liegenden Winkeln; 3) aus einem Winkel und den einschliessenden Seiten; 4) aus allen drey Seiten; 5) aus allen 3 Winkeln, das übrige zu finden.

Auflösung des ersten Falles. Kürze halber nutze man hier den Lehrsatz: Die Sinusse der Seiten stehen mit den Sinussen der ihnen entgegen-

stehenden Winkeln in Verhältniß, welchen Satz wir auch zum Ueberfluße, besonders bey schiefwinklichten Dreyecken erweisen wollen.

Satz. Fig. 6

$$\sin a\,b : \sin b\,c = \sin c : \sin a$$

Beweis.

Man sondere die beyden Seiten durch einen Perpendikel von einander ab, so ist

1) $\sin a : \sin b\,d = r : \sin a\,b$

$$\sin b\,d = \frac{\sin a \times \sin a\,b}{r}$$

2) $\sin c : \sin b\,d = r : \sin b\,c$

$$\sin b\,d = \frac{\sin c \times \sin b\,c}{r}$$

Nun ist also

$$\frac{\sin a \times \sin a\,b}{r} = \frac{\sin c \times \sin b\,c}{r}$$

$\times r$

$$\sin a \times \sin a\,b = \sin c \times \sin b\,c$$

oder in einer Proportion

$$\sin a\,b : \sin b\,c = \sin c : \sin a$$

Zweyter Fall. Wenn eine Seite und die darauf liegenden Winkel gegeben sind. Z. B. es sey Fig. 6 A, b und c gegeben.

Auflösung. Man fälle aus einem den Perpendikel auf die Gegenseite, so entstehen 2 Dreyecke mit rechten Winkeln, woraus sich nach und nach gemäß der obigen Universalregel, und dem ersten Falle alles finden läßt. Denn es ist

1) $r \times \text{cof } A = \text{cot } c \times \text{cot } o$ §. 30.

$$\frac{r \times \text{cof } A}{\text{cot } c} = \text{cot } o$$

Wird o von b abgezogen, so hat man auch x

2) $r \times \text{cof } o = \text{cot } A \times \text{tang } P$

$$\frac{r \times \text{cof } o}{\text{cot } A} = \text{tang } P$$

3) $r \times \text{cof } x = \text{tang } P \times \text{cot } C$

$$\frac{r \times \text{cof } x}{\text{tang } P} = \text{cot } C$$

4) $\text{sin } c : \text{sin } C = \text{sin } b : \text{sin } B$

$$\frac{\text{sin } C \times \text{sin } b}{\text{sin } c} = \text{sin } B$$

5) $\text{sin } c : \text{sin } C = \text{sin } a : \text{sin } A$

$$\frac{\text{sin } c \times \text{sin } A}{\text{sin } C} = \text{sin } a$$

§. 37. **Anmerk.** Man sieht hieraus, daß es auch andere Wege geben könne, wo durch die nämliche Regel die Stücke nach und nach gefunden werden. Die Uebung wird am Ende von selbst den kürzesten zeigen.

Dritter Fall. Wenn zwo Seiten sammt den eingeschlossenen Winkel gegeben sind. Z. B. es sey Fig. 7 bekannt A, B und c.

Auflösung. Es werde auf eine der gegebnen Seiten vom Gegenwinkel aus ein Perpendikel gefällt, so ist, wenn das größere Segment x heißt

1) $r \times \text{cof } c = \text{cot } A \times \text{tang } x$

$$\frac{r \times \text{cof } c}{\text{cot } A} = \text{tang } x$$

Dieß abgezogen von B giebt das Stück $B - x$

2) $r \times \sin x = \cot c \times \operatorname{tang} P$

$$\frac{r \times \sin x}{\cot c} = \operatorname{tang} P$$

3) $r \times \sin (B - x) = \cot a \times \operatorname{tang} P$

$$\frac{r \times \sin (B - x)}{\operatorname{tang} P} = \cot a$$

4) $\sin a : \sin A = \sin c : \sin C$

$$\frac{\sin A \times \sin c}{\sin a} = \sin C$$

5) $\sin c : \sin C = \sin b : \sin B$

$$\frac{\sin c \times \sin B}{\sin C} = \sin b$$

§. 38. **Anmerk.** Ich kann nicht umhin, bevor ich zu dem 4ten Fall schreite, von dem eben aufgelösten ein kleines Feld zur Anwendung zu eröffnen.

§. 39. **Aufgabe.** Aus den geographischen Breiten und Längen zweyer Oerter auf der Erde ihre Entfernung zu finden.

Auflösung. Man weis, daß die zween Meridianbögen, worauf die Breiten bestimmt werden, im Pol einen Winkel bilden, der die Differenz ihrer Längen zum Maase hat. Wenn man sich nun von einem Orte zum andern einen Bogen des grösten Zirkels einbildet, so ist dieser die Entfernung; welche, wenn selbe in Graden gefunden worden, leicht in Meilen zu verwandeln. Es stelle Fig. 8 c den Pol vor, so ist A das Komplement der einen Breite, und B das Komplement der andern Breite. Die Differenz der Längen ist das Maas des Winkels c, und C der Abstand. Nun zur Sache selbst. Nach einer alten Angabe, soll z. B. die Breite von Dresden 51° 5′ und die

Länge

Länge 34° 7′; die Breite hingegen von München 48° 38′ und dessen Länge 31° 25′. Man bilde sich ferner ein, daß in b München, in a aber Dresden liege, so gielt A demnach 90 — 48° 38′ = 41° 22′ und B 90 — 51° 5′ = 38° 55′; c aber ist 34° 7 — 31° 25′ = 2° 42′, so wird

1) r × cos c = cot B × tang x

$$\frac{r \cos c}{\cot B} = \text{tang } x$$

Logarithmisch 19,9995176
10,0929227
9,9065949

Folglich x = 38° 53′
A = 41° 22
x = 38° 53

Demnach A — x = 2, 29

2) r . sin x = cot c . tang P

$$\frac{r \,.\, \sin x}{\cot c} = \text{tang P}$$

Logarithmisch 19,9065949
11,3264372
8,5801577

Also P = 2°, 11

3) r . cos C = cos P . cos A — x
cos C = cos P . cos (A — x)
r

Logarithmisch 9,9996846
9,9995919
9,9992765

Folglich C = 3°, 18′. Wird dieser Bogen in Meilen ausgedrückt, so kommen beynahe 50 Meilen heraus.

aus. Weiter unten wollen wir aus dieser Verfahrungsart eine allgemeine Regel abziehen, und einige Beyspiele darnach auflösen.

Vierter Fall. Aus drey gegebnen Seiten die Winkel zu finden.

Auflösung. Dieser Fall verstattet 3 untergeordnete Fälle.

Erstens, wenn bey den dreyen Seiten ein Quadrant ist. Man verlängere eine andere Seite zum Quadranten, oder verkürze sie nach Erfoderniß, und lasse aus dem Gegenwinkel einen Perpendikel herabfällen so ist

$$r \,.\, \text{cof}\, h = \text{cof}\, c \,.\, \text{cof}\, k$$
$$\frac{r \,.\, \text{cof}\, h}{\text{cof}\, c} = \text{cof}\, k$$

Und weil cof c nichts anders ist als fin C, und k nichts anders als das Maaß von A, so verwandelt sich obiger Ausdruck in folgenden um

$$\frac{r \,.\, \text{cof}\, h}{\text{fin}\ C} = \text{cof}\, A$$

Ist A einmal gefunden, so lassen sich die übrigen leicht nach dem ersten Falle finden, weil entgegenstehende Seiten und Winkel da sind. Z. B.

$$\text{fin}\, h : \text{fin}\, A = \text{fin}\, B : \text{fin}\, y$$
$$\text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} = \text{fin}\, C : \text{fin}\, x$$

Wenn die Seite größer als ein Quadrant ist, so giebt es fast einerley Rechnung.

Zweytens, wenn zwo Seiten gleich sind, so wird ihr eingeschloßner Winkel und die dritte Gegenseite durch einen Perpendikel in zween gleiche

Theile getheilt, wodurch man zween rechtwinklichte Dreyecke erhält, und sich alles leicht finden läßt. Denn Fig. 10

$$r \cdot \cos a = \cot h \cdot \operatorname{tang} c$$
$$\cos a = \frac{\cot h \cdot \operatorname{tang} c}{r}$$

oder auch $r \cdot \sin c = \sin \frac{1}{2} b \cdot \sin h$

$$\sin \tfrac{1}{2} b = \frac{r \cdot \sin h}{\sin c}$$

Weil ferner $a = A$ ist, so hat man alle drey Winkel gefunden.

Drittens, wenn alle Seiten einander ungleich sind. Man verlängere zwo Seiten zu Quadranten, beschreibe aus dem zwischenliegenden Winkel in der Entfernung von 90° durch die Endpunkte nämlich der verlängerten Seiten einen Bogen so weit bis ihn die dritte verlängerte Seite schneidet, so wird Fig. 11 in unserm Dreyecke b d f folgende Proportion statt haben, wie wir am Ende auch erweisen wollen:

$$(\cos b - \cos d) : (\cos b + \cos d) = \operatorname{tang} \frac{f}{2} : \operatorname{tang} \frac{(h+f)+h}{2}$$

Wenn nun hier vom gefundenen letzten Gliede die halbe Differenz $\frac{f}{2}$ subtrahiert wird, so erhält man die kleine Größe das ist h. Nun ist in dem Dreyeck h k p

$$r \cdot \cos m = \cot h \cdot \operatorname{tang} p$$
$$\cos m = \frac{\cot h \cdot \operatorname{tang} p}{r}$$

Die übrigen Winkel stehen dann bekannten Seiten gegenüber, und sind leicht zu bekommen. Z. B.

I $\sin a : \sin f = \sin m : \sin b$

$$\sin a = \frac{\sin f \cdot \sin m}{\sin b}$$

II $\sin c : \sin d = \sin m : \sin b$

$$\sin c = \frac{\sin d \cdot \sin m}{\sin b}$$

Nun zum Beweis.

In dem Dreyeck h k p ist

r : sin n = sin h : sin p; im Dreyeck n c R aber

r : sin n = sin (h + f) : sin q

sin h : sin p = sin (h + f) : sin q oder

sin h : cos d = sin (h + f) : cos b oder verkehrt

sin h : sin (h + f) = cos d : cos b nach der Proportionslehre:

$$(\sin (h+f) - \sin h) : (\sin (h+f) - \sin h)$$

$$= (\cos b + \cos d) : (\cos b - \cos d)$$

Nehme man ferner an, welches wohl möglich ist, es sey Fig. 12, x = h + f

y = h

Folglich verhalten sich B und A wie die Sinusse von x und y, oder (h + f) und h. Was demnach von A und B erwiesen ist, das ist auch eben darum von ihren Sinussen erwiesen.

Aber $B + A : B - A = \text{tang } \frac{x+y}{2} : \text{tang } \frac{x-y}{2}$

$\sin(h+f) + \sin h : \sin(h+f) - \sin h = \text{tang } \frac{(h+f)+f}{2}$

tang $\frac{f}{2}$ das ist:

$$(\sin h + \sin (h + f)) : ((\sin h + f) - \sin h)$$
$$= \left(\text{tang } \frac{(h + f) + f}{2}\right) : \text{tang } \frac{f}{2} \text{ aber}$$

$$(\sin h + \sin (h + f)) : ((\sin h + f) - \sin h)$$
$$= (\cos b + \cos d) : (\cos b - \cos d)$$

$$(\cos b + \cos d) : (\cos b - \cos d)$$
$$= \text{tang } \frac{(h + f) + h}{2} : \text{tang } \frac{f}{2} \text{ oder umgekehrt}$$

$$(\cos b - \cos d) : (\cos b + \cos d)$$
$$= \text{tang } \frac{f}{2} : \text{tang } \frac{(h + f) + h}{2}$$

§. 40. **Anmerk.** Wenn wir mit Herrn Schulze die Figur nach Fig. 13 bezeichnen, so läßt sich Klemms Satz §. 823 allgemein auf folgende Weise ausdrücken, so wie ihn auch oben erwähnter Schulze aber ohne Beweis hingesetzt

$$\sin b . \sin c : \sin \tfrac{1}{2} (a + b - c) . \sin \tfrac{1}{2} (a + c - b)$$
$$= r^2 : (\sin \tfrac{1}{2} A)^2$$

und umgewandt für den letzten Fall

$$\sin C . \sin A : \cos \tfrac{1}{2} (B + C - A) . \cos \tfrac{1}{2} (B + A - C)$$
$$= r^2 : (\cos \tfrac{1}{2} b).$$

Fünfter Fall. Aus den drey Winkeln, die Seiten zu finden. Wir müssen allererst einen Lehrsatz vorausschicken.

§. 41. **Lehrsatz.** Wenn die Seiten eines Kugeldreyecks an beyden Endpunkten zu 90° ergänzt, und durch die Endpunkte der Ergänzungen Bögen größter Zirkel gelegt werden, die sich überall durchschneiden, und ein neues Kugeldreyeck bilden, so sind die Seiten dieses neuen Dreyecks, die Komplemente zu 180 der Winkeln des vorigen Dreyeckes,

wie

wie sie einander entgegen stehen; und umgekehrt, die Winkel des neuen Dreyecks, die Komplemente zu 180° der Seiten des vorigen.

Erster Satz. Fig. 14

$$d + gl = 180$$

Beweis.

$$bl + gp = 180 \text{ oder}$$
$$gl + gb + lp + lg = 180 \text{ d. i.}$$
$$bp + lg = 180$$

Zweyter Satz.

$$ad + l = 180$$

Beweis.

$$ac + bd = 180 \text{ oder}$$
$$ab + bc + cd + bc = 180 \text{ oder}$$
$$ad + l = 180$$

So läßt sich der Beweis von allen übrigen Seiten und Winkeln führen.

Auflösung des fünften Falles. Man schreibe statt der Winkel ihre Komplemente zu 180°, denke sie als Seiten in ein Dreyeck zusamm, und verfahre wie oben. Hat man nun einen Winkel gefunden, so ist dieß das Komplement der überstehenden Seiten zu 180°.

Eine abgezogene Verfahrungsart, aus den gegebnen geographischen Längen und Breiten zweyer Oerter, ihre wahre Entfernung von einander zu finden.

a) Man schreibe sowohl den Log. Sinus, als rechts daneben den Log. Kosinus vom Längenunterschiede heraus.

b) Rechts wird das Kennziffer um 10 vermehrt, und der Log. Tang. von der größern Breite davon abgezogen. Der Logarithmenrest wird unter der Tangentenrubrik aufgeschlagen, der entsprechende Bogen herausgeschrieben, und die kleinere Breite dazu addiert.

* Ist die Längendifferenz über 90°, dann wird die kleinere Breite statt dem Addieren, subtrahiert.

** Heißt eine Breite südlich, die andere nördlich, so wird die nördliche abgezogen.

*** Beträgt die Längendifferenz genau 180°, so läßt sich die Entfernung ohne Trigonometrie finden. Es dörfen nämlich nur die zwo Breiten (wenn sie beyde nördlich oder südlich sind) von selben subtrahiert werden; ist aber eine Breite in diesem Falle nördlich, die andere südlich, so addiere man die kleinere Breite zu 180°, und ziehe die größere ab.

c) Vom obiggefundnen Logarithmenreste gerade über schreibe man auf der Kosinusseite den Log. Sinus heraus, addiere ihn zur Linken, und verringere das Kennziffer um 10.

d) Man suche diese Logarithmensumme unter den Log. Sinus auf, und schreibe den gegenüberstehenden Log. Kosinus heraus, addiere den Log. Sinus des obigen Bogenaggregats oder Differenz dazu,

dazu, vermindere das Kennziffer um 10, so hat man den Log. Kosinus der verlangten Entfernung.

* Beträgt die Längendifferenz über 180°, so berechne man ihren Komplementsbogen.

Ein Beyspiel.

Nach Pescheck hat Lisabon 9°53′ Länge, und 38°40′ Breite. Hingegen Nankin 136°11′ Länge, und 30°15′ Breite; wie weit liegen diese beyde Städte voneinander?

Differenz 136°11′ — 9°53′ = 126° 18′; folglich sein Komplementsbogen 53°42′

Links	Rechts
9,9062964	19,7723314
9,9051787	9,9031966
x9,8114751	9,8691348

Tang 36° 30′
kleinere Breite 30 15
6° 15′ Diff.

9,9239191
9,0368958

x8,9608149 welchem Log. ein Kosinus von 84°46′ entspricht, dessen Komplementsbogen 105° 14′ ist.

Ein anders.

Nach Pescheck hat Paris 22°23′ Länge u. 48°38′ B.
München 31°25′ — — 48°38′ —

Diff. 9° 2′

x9,19592 47	19,9945798
9,8789840	10,0582865
9,0749087	9,9362933

40° 49′
48 38
89° 27′

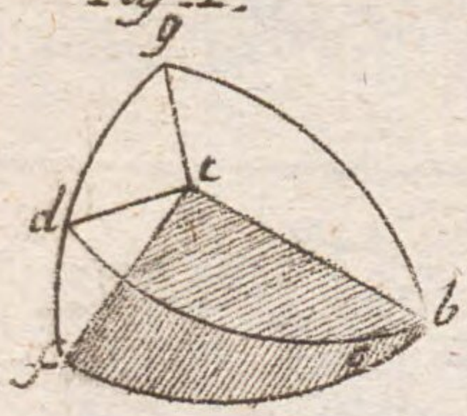
9,9969191
9,9999800
x9,9968991, welchem der Log. Cos. von 6° 51′ entspricht. Weil nun auf einen Grad 15 Meilen gehen, so giebt die Regeldetri

G.	Meil.	G.	Min.
1	15	6	51
60	1	60	
4		411	102¾ Meil.
		444	

Höhere

Zur Kugeldreyecks lehre.

Fig. 1.



b Fig. 2.

Fig. 3.

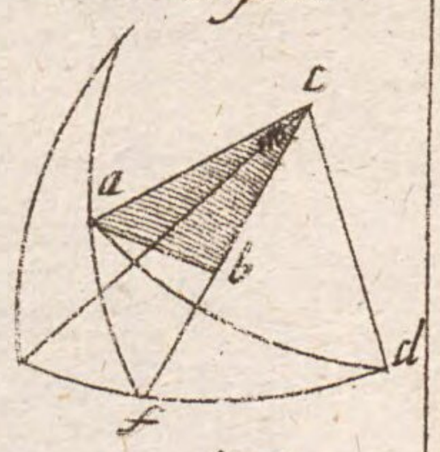


Fig. 4.

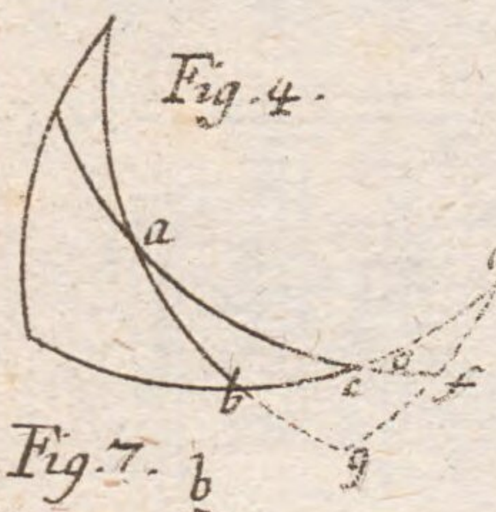
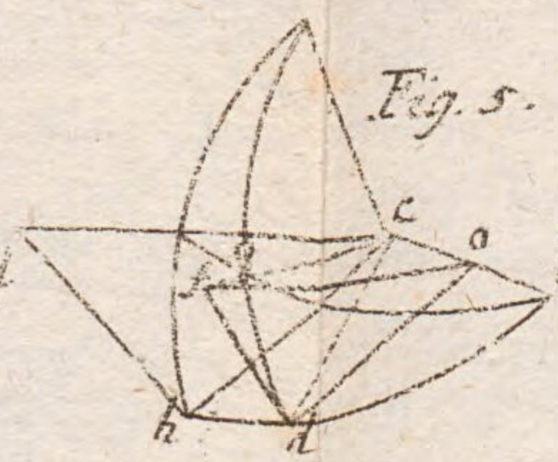


Fig. 5.



b Fig. 6.

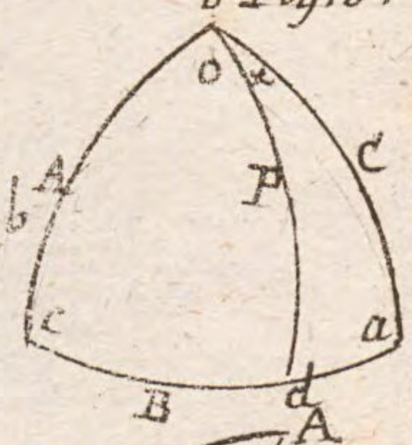


Fig. 7.

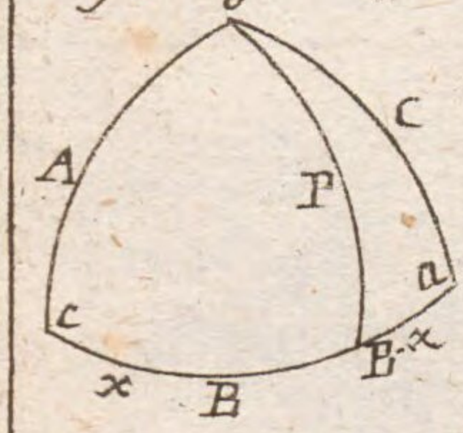


Fig. 8.

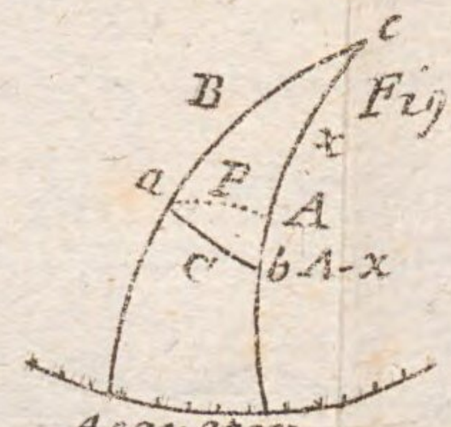


Fig. 9.

Fig. 10.

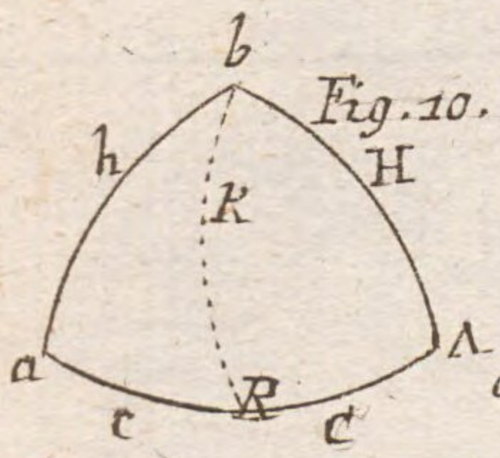


Fig. 11

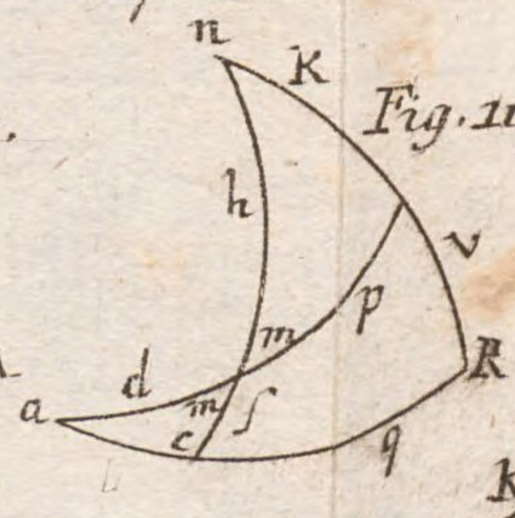
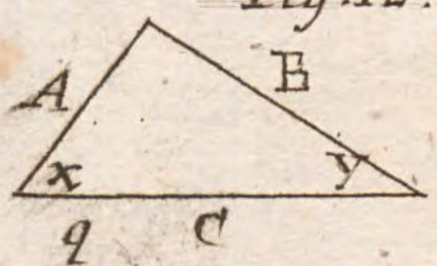


Fig. 12.



C Fig. 13.

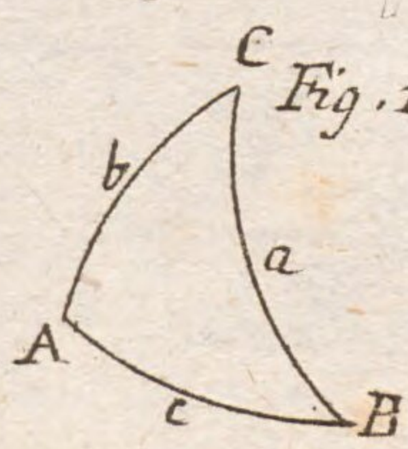
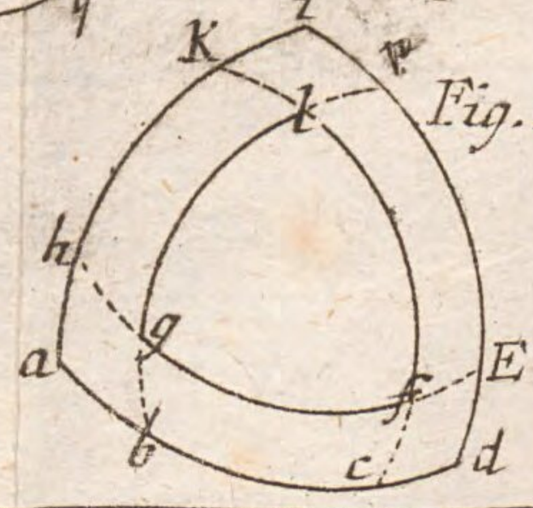


Fig. 14.



Höhere Mathematik.

§. 1. Erklärung.

Unter dem Worte, höherer Mathematik, wird theils die Rechnung des Unendlichen, theils die Lehre von den krumen Linien verstanden. Im ersten Falle hat man die Differential- und Integralrechnung; im zweyten die höhere Geometrie, wo jene erst häufige Anwendung findet, und ihre sonstige Benennung: Analyse unendlicher Größen, ganz verdienet.

§. 2. Anmerk. Es giebt Mathematiker, welche beyde Theile unter den Namen höherer Geometrie befassen wollen; weil sowohl die Erfindung als auch die meiste Anwendung der Analyse auf diesem Zweige der Geometrie beruhet. Es hat indeß jede Parthey ihre Gründe, und die Sache verschlägt eben nichts, man mag diese oder jene Eintheilung annehmen.

§. 3. Anmerk. Für beyde Theile müssen einige Vorbegriffe vorausgeschickt werden, die also erst wohl gefaßt zu werden verlangen.

Von veränderlichen und beständigen Größen, und von den Funktionen.

§. 4. Anmerk. Mit eben dem Nachdrucke, womit am Anfange der Buchstabenrechnung die Begriffe von entgegengesetzten, das ist, von negativen, und positiven Größen anempfohlen worden, empfiehlt man hier mehrmals am Anfange der höhern Mathematik noch neben denselben die Begriffe von veränderlichen und beständigen Größen um so nachdrücklicher, weil sie in diesen Theile der Mathematik durchgehends namhaften Einfluß behaupten.

§. 5. Erkl. Jede bestimmte Größe, die als solche betrachtet eines Wachsthumes, oder Abnahmes fähig ist, heißt veränderlich: hingegen die keines Wachsthumes noch eines Abnahmes fähig sind, ohne ihre Bestimmtheit zu verlieren, werden beständig genennt.

Der Radius ein und des nämlichen Zirkels z. B. man mag ihn ziehen wo man will, ist weder eines Wachsthums noch eines Abnahms fähig, sondern behält immer die nämliche Länge bey. Die Sehne aber kann bald größer, bald kleiner werden, ohne dadurch den Karakter einer Sehne im nämlichen Zirkel zu verlieren.

§. 6. Willk. Satz. Die beständigen Größen ist man gewohnt mit den ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c. u. s. f.; die veränderlichen aber mit den letzten Buchstaben x, y, z, u. d. gl. auszudrücken.

§. 7. Erkl, Funktionen sind veränderliche Größen, die bey einer oder mehr obwaltenden beständ-

ständigen Größen so miteinander in Verwandtschaft stehen, daß der Wachsthum oder die Abnahme der einen unvermeidlichen Einfluß auf die Veränderung der andern habe.

Dieß zu erläutern, dienen die trigonometrischen Linien. Mit dem Sinus wachsen, beym nämlichen Radius, §§. 10. 11. Trig. die Tangente und Sekante: aber ihr Wachsthum veranlaßt auch zugleich unmittelbar den Abnahm aller Kolinien, als des Kosinus, Kotangente, u. s. f.

Auch die Arithmetik ist fruchtbar an Funktionen; Eine beständige Summe können was immer für zwo veränderliche Zahlen geben, wenn sie nur zusamm nicht mehr oder weniger betragen, als die festgesetzte Summe. Denn so z.B. ist $8 + 12 = 20$, oder $9 + 11 = 20$, oder $17 + 3 = 20$; überhaupt also $x + y = a$, wo immer die eine abnimmt wie die andere zugenommen, und umgekehrt. Man kann demnach x oder y weder klein genug, wie ohnehin klar ist, noch auch groß genug setzen, ohne daß nicht auch die andere Funktion einen Werth erhalt. Denn setzt man x in unsern Beyspiele $= 30$, so wird y einen negativen Werth bekommen, und -10 heißen, uud so von andern Substitutionen zu reden. Bey beständigen Differenzen hingegen wächst eine Funktion mit der andern; und nimmt eine mit der andern ab. Z. B. $7 - 3 = 4$, oder $8 - 4 = 4$, oder $6 - 2 = 4$; überhaupt $x - y = d$. Auf eine ähnliche Art läßt sich auch vom beständigen Produkten und Quotussen sprechen.

§. 8. **Einth. und Erkl.** Man theilt die Funktionen in algebraische und transcendentische ein. Algebraisch heißen sie, wenn selbe sich unter das Gesetz einer ausführbaren Gleichung bringen lassen, das heißt in eine Gleichung, woraus der Werth jeder Funktion allein bestimmt werden kann. Im widrigen Falle sind sie transcendentisch.

So ist der Sinus eine algebraische Funktion vom Kosinus des nämlichen Bogens; denn sie lassen sich in die Gleichung bringen, $\text{sin.}\,\Phi = \sqrt{r^2 - \text{cos.}\,\Phi}$ §§. 13. 18. oder nach unsern Ausdrücken $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, wo sich y eben so gut allein, als x finden läßt. Der Sinus hingegen und sein zugehöriger Bogen sind transcendentische Funktionen; weil die Bögen nie in dem Verhältniß ab = oder zunehmen, wie ihre Sinusse. Die algebraischen Funktionen werden ferner eingetheilt in einförmige und mehrförmige. Jene bekommen mit jeder beliebigen Substitution nur einen einzigen Werth, diese erhalten mehrere Werthe, je nachdem eine oder auch beyde zu Würden erhoben sind. Z. B. In der Gleichung $y = \frac{bx}{a}$ sind einförmige Funktionen; In $y = \pm\sqrt{ax - x^2}$ zweyförmige, weil y allemal einen positiven und negativen Werth erhält, man mag für x setzen was man will.

Die übrigen Eintheilungen bleiben bey unsern Gebrauch derselben ohne sonderlichen Nutzen, und können in ausführlichern Schriften, wie in Klemm, u. a. wenn man will, nachgelesen werden.

Vorbegriffe vom Unendlich-Großen und Kleinen.

§. 9. **Erkl.** Endlich heißt eine Größe, in so fern sie noch Gränzen hat. Gränzenlose Größen heißen daher aus dem Gegensatze, unendliche Größen.

Die Tangente von 90°, wie wir in der Trigonometrie gesehen, läßt unmöglich Gränzen gedenken, folglich wird sie mit allem Rechte unendlich groß genannt.

§. 10. **Lehrsatz.** Auch in der Arithmetik lassen sich unendliche Größen gedenken.

Beweis.

Man nehme eine endliche Größe so klein, als man will, an, so wird sie durch fortgesetztes Verdoppeln oder Trippliren u. s. f. sich einmal über die Einheit erschwingen, und dieselbe bald sehr weit zurücklassen: wenn nun diese Zahl immerfort sehr geschwinde quadriertwird, das heißt, wenn man allemal das, was durch quadrieren herausgekommen, wieder mit sich selbst multipliciert, so wird man zuletzt auf eine Zahl kommen, die wegen ihrer Größe nicht mehr geschrieben werden kann, und folglich weil sie sich unter keine Gränzen mehr bringen läßt, unendlich groß genennt werden darf.

§. 11. **Lehrsatz.** Jede endliche Größe zu einer unendlich großen Größe addiert, verschwindet in Rücksicht derselben.

Satz.

$$\infty + x = \infty$$

Beweis.

$\frac{x}{0} = \infty$ Nach §. 25 Trig.

$x0 \quad x = 0 \times \infty$

Prop. $1 : 0 = \infty : x$

$1 : (1+0) = \infty : (\infty + x)$

oder $(1+0) : 1 = (\infty + x) : \infty$

d. i. $1 : 1 = (\infty + x) : \infty$

Und $\infty + x = \infty$.

§. 12. Zusatz. Eben so wird erwiesen, daß eine endliche Größe von einer unendlich großen subtrahiert, gleichfalls verschwinde: denn

$1 : 0 = \infty : x$ §. 11.

oder $1 : (1-0) = \infty : (\infty - x)$

$1 : 1 = \infty : (\infty - x)$

$\infty - x = \infty$

§. 13. Zusatz. Es ist also allgemein wahr, daß $\infty \overline{+} x = \infty$ sey.

§. 14. Anmerk. Diese und folgende Beweismethoden vom Unendlichen sind meist mit einigen Veränderungen aus Vegas mathematischen Vorlesungen wegen ihrer Faßlichkeit entlehnt worden. Denn Kästners und Eulers Beweisarten scheinen bis daher noch für unsern Himmelsstrich einmal zu abstrakt.

§. 15. Erkl. Wenn unendliche Größen zum Quadrat erhoben sind, so heißen sie unendlich große und kleine Größen des zweyten Ranges oder der zweyten Ordnung; zum Kubus erhoben, der dritten Ordnung u. s. f. Z. B. ∞, ∞^2, ∞^3 ∞^4 und so weiter. Ferner $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ u. s. f.

§. 16. **Lehrsatz.** Eine unendliche Größe des ersten Ranges verschwindet in der Addition oder Subtraktion in Rücksicht einer unendlichen Größe des zweyten Ranges.

Satz.

$$\infty^2 \pm \infty = \infty^2$$

Beweis.

$$1 : \infty = \infty : \infty^2$$

Verkehrt
$$\infty : 1 = \infty^2 : \infty$$
$$\infty : \infty \pm 1 = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$$

Aber Gemäß dem vorigen ist

$$\infty = \infty \mp 1$$

Also substit. $\infty : \infty = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$

$\infty : 1 : 1 : = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$

Sohin $\infty^2 \pm \infty = \infty^2$

§. 17. **Zusatz.** Eben so richtig ist es allgemein, daß jede unendlich große Größe eines niederen Ranges in Rücksicht einer andern vom höhern Range verschwindet. Denn es ist auch

$$1 : \infty = \infty^2 : \infty^3$$

Versetzt. $\infty : 1 = \infty^3 : \infty^2$ Es ist aber auch

$$\infty : \infty \pm 1 = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$$

und weil wieder $\infty = \infty \mp 1$

$$\infty : \infty = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$$

$\infty : 1 : 1 = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$

$$\infty^3 = \infty^3 \mp \infty^2 \text{ u. s. f.}$$

§. 18. **Lehrsatz.** Eine unendlich kleine zu einer endlichen addiert, oder von ihr subtrahiert, verschwindet mehrmals.

Satz.

Satz.

$$1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$$

Beweis.

$$\frac{1}{\infty} : 1 = 1 : \infty$$

Verkehrt $\quad 1 : \frac{1}{\infty} = \infty : 1$

Und $\quad 1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \infty : \infty \pm 1$

aber $\quad \infty = \infty \pm 1$

Subst. $\quad 1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \infty : \infty$

$$1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = 1 : \infty : 1$$

$$1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$$

§. 19. **Lehrsatz.** *Eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung verschwindet in Rücksicht einer solchen Ordnung.*

Satz.

$$\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$$

Beweis.

$$1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$$

$$1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$$

Aber

Aber $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$ folglich subst.

$$1 : 1 = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$$

Und $$\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$$

§. 20. Zusatz. Ueberhaupt verschwinden unendlich kleine Größen der höhern Ordnung in Rücksicht solcher der niedern Ordnung, denn es ist wieder

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^4}$$

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^3} \pm \frac{1}{\infty^4}$$

Aber $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$

Subst. $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^3} \mp \frac{1}{\infty^4}$

$: \infty \quad 1 : 1 = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^3} \mp \frac{1}{\infty^4}$

Und $\frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty^3} \pm \frac{1}{\infty^4}$

§. 21. Anmerk. Unendlich kleine Größen giebt es zwar in der physischen Welt nicht; aber sie kommen dem Mathematiker doch gut zu statten, wenn er sich bey Zergliederung endlicher Größen ihre Entstehung nicht als ein plötzliches Daseyn; sondern als eine allmählig sanfte Entwickelung der möglich kleinsten Wachsthümer vorstellt. Auf gleiche Art läßt er auch Größen nicht auf einmal, sondern nach und nach in den kleinsten Abnahmen sich verlieren.

Z. B. Der Sinus vom Nullgrade wird nicht mit einem Male zum Sinustotus, sondern er wächst, so zu sagen, Punkt für Punkt durch alle Sekunden, Terzen, Quarten u. d. gl. des Quadrantens. Und so muß auch von der Abnahme desselben im zweyten Quadranten gesprochen werden.

Je kleiner man also solche Wachsthümer und Abnahme annimmt, desto richtiger muß auch am Ende das Resultat von der Beschaffenheit der Zusammensezung, oder Vernichtung

tung solcher Größen seyn. Man ist demnach am besten daran, wenn sie so klein genommen werden, daß sich nichts kleiners darüber denken oder angeben läßt, und dieß heißt in der Sprache der Mathematiker unendlich kleine Größen, oder Differentiale endlicher Größen.

Differentialrechnung.

§. 22. Erkl. Die Anweisung, die unendlich kleinsten Wachsthümer oder Abnähme, das heißt die Differentiale veränderlicher Größen in jedem Zustande oder Verhältniß derselben richtig zu bestimmen, wird Differentialrechnung genennt.

§. 23. Zusatz. Beständige Größen haben ihrem Begriff gemäß keine Differentiale.

§ 24. Willk. Satz. Das Zeichen eines Differentials ist nicht mehr $\frac{1}{\infty}$, sondern ein d, welches vor der abnehmenden, oder zunehmenden Größe hingeschrieben wird. Z. B. dx, dy, dz, wo d kein Faktor ist, sondern mit seinem dabeystehenden Buchstaben, den unendlich kleinen Wachsthum oder Abnahm der Größe bedeutet, ungefähr wie $\frac{x}{\infty}$, $\frac{y}{\infty}$, $\frac{z}{\infty}$ u. s. f.

§. 25. Zusatz. Wenn also die Größe vor seinen Wachsthum x heißt, so ist sie nachher x + dx, oder nach der Abnahme x — dx. Ueberhaupt x $\pm$ dx. Weil sie nachher um $\frac{x}{\infty}$ größer oder kleiner geworden.

§. 26. Zusatz. Das Differential von a oder b, in so ferne sie beständige Größen bedeuten, ist also = o das heißt d a = o db = o u. s. f.

Anmerk.

§. 27. **Anmerk.** In der Geometrie lassen sich die Differentiale von Linien so ziemlich versinnlichen. Man ziehe Fig. 1 nur das Dreyeck a k p, und bilde sich ein die Linie a b wachse so lange mit der Funktion b c fort, bis beyde eine bestimmte Gränze z. B. k p erreichen, so kann a b durch x und b c durch y ausgedrückt werden. Wenn nun dieses a b um ein unendlich kleines Stück b f, welches b f wegen ihrer unendlichen Kürze freylich nicht gezeichnet werden kann, gewachsen ist, so wird auch b c um das unendlich kleine Stück n g zugenommen haben. Die Linien heissen nun nach dem Wachsthum x + dx und y + dy. Wenn endlich ihre vorigen Größen x y davon abgezogen werden, so bleiben ihre Differenzialen übrig; also x + dx — x = dx und y + dy — y = dy.

§. 28. **Zusatz.** Es läßt demnach nicht schwer, einzelne Größen zu differenzieren; man hat nichts weiter zu thun, als daß man ihnen das gewöhnliche d vorsetzt. So ist z. B. d(x — y + z + a) = dx — dy + dz. Anders verhält sich aber die Sache mit Würden, Produkten und Quotienten.

§. 29. **Lehrsatz.** Das Differential einer Würde ist ein Produkt von drey Faktorn, welche der Exponent, die Würde selbst mit seinen um eines verringerten Exponenten, und das Differential der Urgröße, oder simpeln Größe sind.

Satz.

$$d(x^m) = m x^{m-1} dx$$

Beweis.

Man erhebe x sammt seinem Differential dx, vermöge des binomischen Lehrsatzes, zur mten Würde: erhebe auch x ohne Differential zur nämlichen Würde, so wird der Unterschied dieser Würden eben darum das Differenzial der Würde selbst geben.

$$d(x^m)$$

$$d(x^m) = (x+dx)^m - x^m = x^m + m x^{m-1} dx + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} x^{m-2} dx^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} x^{m-3} dx^3 \ldots - x^m$$

$d(x^m) = m x^{m-1} dx$; denn die übrigen Glieder verschwinden alle, als unendlich kleine Größen der höhern Ordnung, in Rücksicht solcher der niedern Ordnung.

§. 30. **Zusatz.** Um also eine Würde zu differenzieren, darf nur der Exponent zum Koefficienten gemacht, er selbst um eines vermindert, und diesen beyden Faktorn das Differential der simpeln Größe als dritter Faktor angehängt werden, z. B. $d(x^5) = 5 x^4 dx$.

§. 31. **Zusatz.** Weil sich alle Wurzelgrößen auf Würden gebrochner Exponenten reduzieren lassen, so sind wir auch itzt schon im Stande, alle einfache Wurzelgrößen, mit zu Hilfe gerufner Würdenlehre, zu differenzieren. Z. B. $d(\sqrt[3]{x^2}) = d(x^{\frac{2}{3}})$

$$= \tfrac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} dx = \frac{2 x^{-\frac{1}{3}} dx}{3} = \frac{2 dx}{3 x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 dx}{3 \sqrt[3]{x}}$$

§. 32. **Zusatz.** Auch sogar Brüche, die zum Zähler die Einheit, und zum Nenner eine veränderliche Größe haben, lassen sich nach dem Bisherigen differenzieren, z. B. $d\left(\frac{1}{x}\right) = d(x^{-1}) = -1$

$$x^{-2} dx = -x^{-2} dx = \frac{-dx}{x^2}$$

§. 33. **Lehrsatz.** Das Differential eines Produkts von zwoen veränderlichen Größen ist gleich dem ersten Faktor in das Differential des zweyten multipliciert, mehr dem zweyten Faktor in das Differential des ersten multipliciert.

Satz.

Satz

$$d(xz) = x\,dz + z\,dx$$

Beweis.

Man multipliciere zuerst die Faktorn mit ihren Differentialen unter sich, dann auch ohne Differential, so wird der Unterschied der Produkte das verlangte Differential geben.

$$\begin{aligned} d(xz) &= (x + dx)(z + dz) - xz \\ &= xz + x\,dz + z\,dx + dx\,dz - xz \\ &= x\,dz + z\,dx + dx\,dz, \text{ also} \end{aligned}$$

$d(xz) = x\,dz + z\,dx$; weil das letzte Glied aus obigen Grunde wieder verschwindet.

§. 34. **Anmerk.** La Kaile, der alle Beweise für die Differentialrechnung aus der Geometrie herholet, wodurch freylich die Sache das Ansehen gewinnt, als hange dieser Zweig der Mathematik ganz von der Geometrie ab, hat obigen Satz beyläufig so bewiesen. Ein Produkt von zweenen Faktorn stellt den Inhalt eines Parallelograms vor, dessen Faktorn Höhe und Grundlinie sind. Wachsen nun Höhe und Grundlinie, so bekömmt das Parallelogram ein Differential, welches aus drey unendlich kleinen Parallellogramen bestehet. Es ist nämlich Fig. 2

$d(\square apbf) = bcfg + pqkf + fghk$

da nun $bc = fg = dz$

$cg = bf = ap = x$

so ist $bcfg = x\,dz$; auf gleiche Art auch

$pqkf = z\,dx$ und

$fghk = dx\,dz$. Nun substit.

$d(xz) = x\,dz + z\,dx + dx\,dz$ und weil das letzte Glied aus mehrmal angeführtem Grunde wegfällt; so ist noch $d(xz) = x\,dz + z\,dx$. Ein sehr sinnlicher, und eben so strenger Beweis.

§. 35. Zusatz. Ist bey dem Produkt einer von den zween Faktoren beständig, so wird bloß der beständige Faktor mit dem Differentiale des veränderlichen multipliciert. Der Beweis davon fließt zwar schon aus obigen Satze; Denn $d(ax) = adx + xda = adx + x \times o = adx$; allein er läßt sich weit richtiger aus obigen Gründen führen. Es ist nämlich wieder $d(ax) = (a + da) \times (x + dx) - ax = a \times (x + dx) - ax = ax + adx - ax = adx$.

§. 36. Lehrsatz. Das Differential eines Produkts von dreyen, oder mehr veränderlichen Größen erhält man, wenn vom Produkt immer ein Faktor weggelassen, und statt dessen sein Differential gesetzt wird, und dieß so oft, bis die Reihe alle Faktoren durch und durch getroffen.

Satz.

$$d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx.$$

Beweis.

Es sey $xy = v$, so ist $xdy + ydx = dv$

$z \times \quad xyz = vz$

Daher $d(xyz) = vdz + zdv$

Subst. für v und dv

Also $d(xyz) = xydz + z(xdx + ydx)$

$d(xyz) = xydz + zxdy + zydx$

§. 37. Zusatz. Eben so leicht ist es auch zu beweisen, daß $d(xvyz) = vxydz + vxzdy + vyzdx + xyzdv$; und so auch von fünf, sechs, und noch mehr Faktorn zu reden.

§. 38. **Zusatz.** Finden sich auch beständige Größen als Faktorn ein, so geht die Regel wie oben fort, nur daß selbe kein Differential haben, folglich jene Glieder, in welche sie multipliciert werden sollten, wegfallen, als Produkte nämlich, welche Null zum Faktor haben, z. B. $d(amxyz) = amxydz + amxzdy + amyzdx$. Denn $axyzdm = axyzXo = o$ u. s. f.

§. 39. **Zusatz.** Nun ist man bereits im Stande auch zusammengesetzte Würdengrößen zu differenzieren. Z. B. $d(x^2y^3) = x^2 d(y^3) + y^3 d(x^2) = x^2 X 3y^2 dy + y^3 X 2x dx = 3x^2y^2 dy + 2y^3 x dx$

§. 40. **Lehrsatz.** Das Differential eines Quotienten oder Bruches ist gleich dem Nenner multipliciert mit dem Differential des Zählers, weniger dem Zähler multipliciert mit dem Differential des Nenners, dieß alles durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Satz.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = y\frac{dx - x dy}{y^2}$$

Beweis.

Man dividiere die beyden Größen mit ihren Differentialen, und ohne denselben; der Unterschied wird wieder das Differential des Quotienten selbst seyn. Es ist demnach.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y}$$

Unter gleiche Nenner gebracht.

$$= \frac{xy + y\,dx - xy - x\,dy}{y^2 + y\,dy}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = y\frac{dx - x\,dy}{y^2}$$; denn y dy verschwindet im Renner als eine unendlich kleine Größe in Rücksicht der endlichen y^2

§. 40. **Anmerk.** Dieß läßt sich sehr anschauend aus der Geometrie beweisen. Man beschreibe Fig. 3. zween Zirkel in einander, die sich unendlich nahe liegen, und in einem Punkte berühren. Aus diesen Pnnkt werde eine Sehne sammt ihrem Differentiale gezogen, so sind, wenn man selbe durch eine andere Sehne die ebenfalls wieder zwo Differentiale haben wird, durchschneidet, die Produkte der Segmente in beyden Fällen gleich. Es ist nämlich

I. $zy = 1.x = x$ und

$y : z = \frac{x}{y}$

II. $1 \times (x + dx) = (y + dy) \times (z + dz)$

$x + dx = yz + zdy + ydz + dydz$

Subst. $x + dx = \frac{yx}{y} + \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right) + dydz$

Abgek. $x + dx = x + \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right) + dydz$

$dx = \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right)$

$dx - \frac{xdy}{y} = yd\left(\frac{x}{y}\right)$

: y

$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$

Und zu gleichen Nennern gebracht.

$y\frac{dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$

§. 41. Zusatz. Sind der Nenner oder der Zehler beständig, oder mit beständigen Größen vermischt, so läßt sich die allgemein bewiesene Regel ebenfalls anwenden. Zum Beyspiel:

1) $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x\,da - a\,dx}{x^2} = -\frac{a\,dx}{x^2}$

Denn $\frac{a + da}{x + dx} - \frac{a}{x} = \frac{a}{x+dx} - \frac{a}{x}$

$= \frac{ax - ax - a\,dx}{x^2 + x\,dx} = \frac{-a\,dx}{x^2}$

2) So ist auch $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a\,dx}{a^2} = \frac{dx}{a}$

§. 42. Zusatz. Obwohl sich alle mögliche Größen nach den bisherigen Regeln differentieren lassen, so kann es doch Fälle geben, wo man durch Hilfe anderer Kunstgriffe leichter abkömmt. Man nennt dieß die Transformation, und kömmt sehr gut bey zusammgesetzten Größen zu statten. Es wird nämlich die ganze komplexe Größe einem Buchstaben gleichgesetzt, und so lange fortkalkuliert, bis der Ausdruck zum Differentieren geschickt ist. Nach der Differentiation kann dann wieder der eigentliche Werth substituiert werden. Wir wollen die beyden Arten im nächsten besten Beyspiele vergleichen, und sehen, welche kürzer, und leichter ist. Es soll $\sqrt[3]{ax - y^2 + xz}$ differentiert werden. Erst auf gemeine Art:

$d(\sqrt[3]{ax - y^2 + xz}) = d(ax - y^2 + xz)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}(ax - y^2 + xz)^{\frac{1}{3}-1}\, d(ax - y^2 + xz)$

$= \frac{1}{3}(ax - y^2 + xz)^{-\frac{2}{3}}(a\,dx - 2y\,dy + x\,dz$

$+ z\,dx) = \frac{1}{3} \times (\sqrt[3]{ax - y^2 + xz})^{-2} \times (a\,dx -$

$$-2ydy + xdz) = \frac{adx - 2ydy + xdz}{3(ax - y^2 + xz)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{adx - 2ydy + xdz}{3\sqrt[3]{(ax - y^2 + xz)^2}}$$

Durch Transformation.

$$\sqrt[3]{ax - y^2 + xz} = p$$

$$ax - y^2 + xz = p^3$$

diff. $$adx - 2ydy + xdz + zdx = 3p^2\,dp$$

$$\frac{adx - 2ydy + xdz + zdx}{3p^2} = dp$$

subst. $$\frac{adx - 2ydy + xdz + zdx}{3\sqrt[3]{(ax - y^2 + xz)^2}}$$

§. 43. **Erkl.** Es kann auch Fälle geben, wo die Differentialen selbst noch eines Wachsthumes, oder Abnahmes fähig sind, daher werden zuweilen die Differentiale noch einmal differentiert, und dann heißen sie Differentiodifferentiale.

§. 44. **Zusatz.** Differentiale nochmal zu differentieren, kann keine Schwierigkeit haben. Man darf nur, um aller Verwirrung auszuweichen, statt den simpeln Differentialen einen Buchstaben setzen, und nach der Differentiation wieder substituieren.

§. 45. **Aufgabe.** Es soll $\frac{xdy - ydx}{x^2}$ nochmal differentiert werden.

Auflösung. Es sey $dy = v$ und $dx = z$ so ist $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xv - yz}{x^2}$

Nun

Nun ist ferner $d\left(\frac{xv - yz}{x^2}\right) = \frac{x^2 (xv - yz) - (xv - yz)\, d(x^2)}{x^4}$

$$\frac{x^2 (xdv + vdx - ydz - zdy) - (xv - yz) \times 2xdx}{x^4}$$

$$\frac{x^3 dv + x^2 v dx - x^2 y dz - x^2 z dy - 2x^2 v dx + 2xyz dx}{x^4}$$

Subſtit. $\frac{x^3 ddy + x^2 dxdy - x^2 y ddx - x^2 dxdy - 2x^2 dxdy + 2xy ddx}{x^4}$

Oder auch abgekürzt.

$$\frac{x^3 d^2 y - 2x^2 dxdy - x^2 y d^2 x - 2xy d^2 x.}{x^4}$$

§. 46. Anmerk. Von dieſen Beyſpiele läßt ſich gar leicht auf andere ſchließen, wenn man gählling dergleichen Differentiodifferentiale nöthig haben ſoll.

Et.

Etwas vom größten, und kleinsten Werthe der Funktionen, als eine vorläufige Anwendung der Differentialrechnung.

§. 47. **Erkl.** Es kann Größen geben, die nicht immer fort wachsen, oder abnehmen, sondern irgendwo ihre Differentiale einen Augenblick aufhören, und in die entgegengesetzte umändern lassen. So z. B. steigt ein in die Höhe geworfner Stein, oder eine Bombe anfangs immer höher und höher, endlich kehren diese Körper um, und fallen wieder immer tiefer und tiefer. So schwillt bey der Fluth des Meeres das Wasser immer mehr an, bis es eine gewisse Höhe erreichet, von der es wieder sinket, und zwar ebenfalls bis auf ein gewisses Ziel, wo es mehrmals zu steigen anfängt. Diese Zustände solcher Größen nun heißen größte und kleinste Werthe der Funktionen.

§. 48. **Zusatz.** Weil in solchen Zuständen die Differentiale der Funktionen wegen ihrer Vernichtung kein Verhältniß zu einander haben, das heißt, weil ihr Verhältniß zu einander Null ist, so können die Werthe des Kleinsten, oder Größten unter dieser Hypothese leicht bestimmt werden; denn man darf nur die Verhältniße der Differentiale = o setzen, und dann sehen, was sich für die eine, oder die andere Funktion ergiebt.

§. 49. **Zusatz.** Ob der herausgekommne Werth ein Größter oder Kleinster sey, kann nicht anders, als aus den Umständen der Aufgabe abgenommen werden.

§. 50. **Aufgabe.** Auf welchen Punkt des Diameters im Zirkel läßt sich der größte Perpendikel aus der Peripherie herabfällen?

Auf-

Auflösung. Man suche eine Gleichung für diesen Perpendikel, differenziere sie, und lasse das Verhältniß der Differentiale der beyden Funktionen Null werden, so werden die Umstände, unter welchen die Forderung möglich ist, aus der Gleichung bald sichtbar seyn. Es heiße Fig. 4. der Perpendikl $ab = y$ das eine Segment $db = x$ so ist das andere ba, wenn a den Diameter ab bezeichnet $= a - x$

Folglich
$$y^2 = x(a - x)$$
$$y^2 = ax - x^2$$
$$y = \sqrt{ax - x^2}$$
$$y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Diff.
$$dy = \tfrac{1}{2}(ax - x^2)^{\frac{1}{2}-1}\, d(ax - x^2)$$
$$dy = \tfrac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}(adx - 2xdx)$$
$$dy = \frac{adx - 2xdx}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

:dx
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

aber
$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = \frac{a - 2x}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$X\,2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad 0 = a - 2x$$
$$2x = a$$
$$x = \tfrac{1}{2}a$$

Dieß geschieht also in jenem Punkte des Diametes, wo ein Segment, folglich auch das andere dem halben Diameter gleich ist, das ist im Mittelpunkte.

§. 51.

§. 51. **Aufgabe.** Ein Haus soll bis an den Dachstuhl 45000 Rubikfuß in sich fassen. Der Grund dazu ist aber nicht länger, als 50 Schuh. Fragt sich, wie sollen sich Länge und Breite zu einander verhalten, daß die Außenfläche des Hauses die Kleinstmöglichste werde; das heißt, daß man die wenigsten Baumaterialien brauche, folglich auch die kürzeste Zeit zum Bauen verwendet werde?

Auflösung. Es sey 45000 = q
Die Länge 50 = b
Breite = x
so ist die Höhe $= \frac{q}{bx}$

Nun ist die Grundfläche dieses Parallelepipedums = b x, die senkrechte Seitenfläche auf der Länge $b \times \frac{q}{bx} = \frac{bq}{bx} = \frac{q}{x}$ und die senkrechte Seitenfläche der Breite.

$= x \times \frac{q}{bx} = \frac{xq}{bx} = \frac{q}{b}$

Folglich die halbe Oberfläche $y = bx + \frac{q}{x} + \frac{q}{b}$

$y = \frac{bx^2 + q}{x} + \frac{q}{b}$ Diff.

$dy = \frac{x\,d\,(bx^2 + q) - (bx^2 + q)\,dx}{x^2}$

$dy = \frac{x \times (2bxdx) - bx^2dx - qdx}{x^2} = \frac{2bx^2dx - bx^2dx - qdx}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 2bx^2 - bx^2 - q$

$\frac{dy}{dx} = o$

$2bx^2 - bx^2 - q = o$

$2bx^2 - bx^2 = q$

$x^2 = \frac{q}{2b-b} = \frac{q}{b}$ und $x = \sqrt{\frac{q}{b}}$

Die Breite wird also erhalten, wenn der kubische Inhalt durch die Länge dividiert, und aus dem Quotus die Wurzel ausgezogen wird. Nun muß noch die Höhe bestimmt werden.

$$\text{Es ist } a = \frac{q}{b\,x}$$

$$a\,b\,x = q$$

$$\text{Subst. } a\,b\sqrt{\frac{q}{b}} = q$$

$$\text{Quad. } \frac{a^2\,b^2\,q}{b} = q^2$$

$$a^2\,b\,q = q^2$$

$$a^2\,b = q$$

$$a^2 = \frac{q}{b}$$

$$a = \sqrt{\frac{q}{b}}$$

Also muß man Höhe und Breite gleich machen, wenn die Foderung gelten soll. Es ist demnach in unserer Aufgabe $x = \sqrt{\frac{45000}{50}} = \sqrt{900} = 30$. Man zerfälle um 900 in was immer für zween Faktoren, so wird die Oberfläche allemal größer seyn.

Aufgaben aus arithmetischen Funktionen.

Die Juden hielten bey einem Fürsten um Duldung in seinen Landen an, und versprachen ihm, nebst einer jährlichen Abgabe von baaren 1000 fl. auch eine Kopfsteuer, vermög welcher jeder Jude alle Jahre so viele Dukaten zahlen wollte, als Köpfe geduldet werden. Die Antwort des Fürsten war: Euer Anerbiethen ist großmüthig; Ihr sollt Dul-

dung

dung haben: und damit auch ich fürstlich handle, so verspreche ich entgegen jedem Juden, der sich in meinem Lande ansäßig macht, eine jährliche Anweisung von 100 fl. Es fragt sich nun: Wie viele Juden dörfen sich häuslich niederlassen, daß gemäß der beederseitigen Bedingung ihre Abgabe die kleinste sey?

Auflösung. Die Anzahl aller naturalisierenden Juden seyen x. Wenn der Dukaten zu 5 fl. gerechnet wird, so ist der Tribut eines Kopfes jährlich $5x - 100$; folglich aller Köpfe $(5x - 100) \times x = 5x^2 - 100x$; und mit der fixen Abgabe $5x^2 - 100x + 1000 = y$

diff. $10xdx - 100dx = dy$

$$10x - 100 = \frac{dy}{dx} = 0$$

$$10x = 100$$

$$x = \frac{100}{10} = 10$$

Also ist die jährliche Zahlung von 10 Juden die Kleinste.

Probe. Jeder Jude müßte 10 Dukaten, das ist 50 fl. zahlen; also alle, $50 \times 10 = 500$ fl.; dieß macht mit den fixen 1000 fl. 1500 fl. Weil nun jeder Jude 100 fl. bekömmt, so bekommen alle 1000 fl.; diese abgezogen, läßt 500 fl. Setzen wir 8 Juden, so giebt einer 8 Dukaten, oder 40 fl. mithin alle $40 \times 8 = 320$ und die 1000 dazu, beträgt 1320; die 800 fl. welche sie miteinander herausbekommen, abgezogen, giebt 520; folglich um 20 fl. mehrer als vorher. Das nämliche kömmt auch heraus, wenn man 12 Juden annimmt. Kurz, man

ändere die Anzahl der Juden wie man will, so wird allemal mehr als 500 fl. zum Vorschein kommen.

Noch eine solche Aufgabe.

Ein Getraidhändler führt von München 6 Schäffel Korn weg. Setzen wir, mit jeder Meile, tiefer ins Ausland, werde auch das Münchner Schäffel um 12 kr. theurer; es steige aber auch der Lebensunterhalt, so daß er den ersten Tag $\frac{1}{2}$ fl. den zweyten 1 fl. den dritten $1\frac{1}{2}$ fl. u. s. w. verzehrte. Nun fragt es sich, wenn er täglich 6 Meilen macht, wie weit er fahren dörfe, um den größten Gewinn nach Hause zu bringen?

Auflösung. Die Meilen, wie weit er fahren darf, sollen x heißen. Man findet demnach durch die Regel Quinque den Gewinn auf folgende Weise

Meil	Schäfft	kr.	Schäfft	Meil.
1	1	12	6	x

$$\frac{\frac{6}{\frac{x}{72}}}{60} = \frac{6x}{5} \text{ fl.}$$

Nun muß natürlich auch der Unkosten abgezogen werden, der aus dem Unterhalte der Pferde und des Fuhrmanns entspringt. Weil dieß eine Progreßion giebt, deren Differenz $= \frac{1}{2}$ das erste Glied ebenfalls $\frac{1}{2}$ ist, und die Anzahl der Glieder durch die Regel Detri bestimmt werden kann, nämlich

Meil

M.	Tag	M.
6	1	x

$$n = \frac{x}{6} \text{ Tag.}$$

So ist nach der Formel $\int = an + \frac{(dn^2 - dn)}{2}$

$$\int = \frac{1}{2} \times \frac{x}{6} + \frac{(\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{36} - \frac{1}{2} \times \frac{x}{6})}{2} = \frac{x}{12} + \frac{\frac{x^2}{72} - \frac{x}{12}}{2}$$

$$= \frac{x}{12} + \frac{\frac{x^2 - 6x}{72}}{2} = \frac{x}{12} + \frac{x_2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{x}{12} + \frac{\left(\frac{x^2}{72} - \frac{x}{12}\right)}{2}$$

$$\int = \frac{x}{12} + \frac{\left(\frac{x_2}{72} - \frac{6x}{72}\right)}{2}$$

$$\int = \frac{x}{12} + \frac{x^2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{12x}{144} + \frac{x^2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{6x + x^2}{144} \text{ fl.}$$

Weil aber die Rückreise eben das kostet, als eine abnehmende Progreßion, so muß dieß doppelt genommen werden. Also der Unkosten $\frac{6x + x^2}{72}$ fl. Daher ist der ganze Gewinn, den er nach Hause bringt, und den wie y nennen wollen.

$$\frac{6x}{5} - \frac{6x - x^2}{72} = y$$

$$\frac{432x - 30x - 5x^2}{360} = y$$

$$402x - 5x^2 = 360y$$
$$402dx - 10xdx = 360dy \quad \text{diff.}$$
$$402 - 10x = \frac{360dy}{dx} = 0$$
$$402 = 10$$
$$40\frac{1}{5} = x$$

Diese Meilen zu Täge gemacht, das ist durch 6 dividiert giebt $40\frac{1}{5} = \frac{201}{30} = 6\frac{21}{30} = 6\frac{7}{10}$ Tag.

§. 52. **Anmerk.** Solche Anwendungen vom Kleinsten und Größten giebt es in der Physik, überhaupt in der angewandten Mathematik der Menge nach. Uns genügt hier den Anfängern in diesem Stücke die Bahn gebrochen zu haben, wenn sie je Muth besitzen, sich weiter in diesem noch sehr unbearbeiteten Felde, wo noch manche Erfindungen für das gemeine Leben zu machen wären, umzusehen.

Integralrechnung.

§. 53. **Erkl.** Integrieren heißt, aus einem Differentiale die Größe finden, der dasselbe zugehört.

§. 54. **Zusatz.** Es muß also gerade die umgekehrte Verfahrungsart des Differentierens beobachtet werden, wenn man ein Differential integrieren will.

§. 55. **Willk. Satz.** Das Zeichen, daß eine Größe integriert werden soll, ist eiu vorgesetztes S. Vielleicht soll es, obwohl uneigentlich, die Summe aller Differentialen bedeuten. Z. B. $S(2axdx) = ax^2$.

§. 56. **Zusatz.** Wenn man allgemein jede Größe als eine Gattung von Würden ansieht, so heißt überhaupt das Gesetz zu integrieren, so: Man erhöhe den Exponenten jener Größe, wovon das simple Differential sichtbar ist, um eins, und dividiere alles durch das Produkt aus den

erhöhten Exponenten in das Differential der Radikalgröße.

§. 57. Aufgabe. Es sollen folgende Differentiale integriert werden. 1) $m x^{m-1} dx$ 2) $4x^3 dx$ 3) $\frac{y^2 dy}{3}$

Auflösung. 1) $S(m x^{m-1} dx) = \frac{m x^{m-1+1} dx}{(m-1+1) dx} = \frac{m x^m dx}{m dx} = x^m$

2) $S(4x^3 dx) = \frac{4 x^4 dx}{4 dx} = x^4$

3) $S\left(\frac{y^2 dy}{3}\right) = \frac{y^3 dy}{3 \times 3 dy} = \frac{y^3}{3 \times 3} = \frac{1}{9} y^3$

§. 58. Zusatz. Wenn manchmal die Größe selbst, wovon das simple Differential da ist, nicht zum Vorschein kömmt, so kann sie durch einen Kunstgrif ersetzt werden, welches geschieht, wenn eben diese mangelnde Größe zum Null erhoben als Faktor eingeschoben wird; indem dieß, als der Werth von eins, in einem Produkte nichts ändert.

§. 59. Aufgabe. Es sollen integriert werden, 1) $a dx$ 2) $dx - dy$ 3) $\frac{dv}{2} + dz - b dx$

Auflösung. 1) $S(a dx) = S a x^0 dx = \frac{a x^1 dx}{1 dx} = ax$

2) $S(dx - dy) = S(x^0 dx - y^0 dy) = \frac{x^1 dx}{1 dx} - \frac{y^1 dy}{1 dy} = x - y$

3) $S\left(\frac{dv}{2} + dz - b dx\right) = S\left(\frac{v^0 dv}{2} + z^0 dz - b x^0 dx\right) = \frac{v dv}{2 dv} + \frac{z dz}{dz} - \frac{b x dx}{dx} = \frac{1}{2} v + z - bx.$

Zu-

§. 60. **Zusatz.** Differentiale der Produkte und Quotienten veränderlicher Größen sind leicht zu kennen, weil diese wechselweise mit ihren simpeln Differentialen multipliciert sind. Sie dörfen daher nicht als abgesonderte, sondern als zusammenhangende, komplexe Größen behandelt werden.

§. 61. **Aufgabe.** Es seyen zu integrieren,

1) $xdy + ydx$ 2) $\frac{ydz - zdy}{y^2}$ 3) $xvzdy + xvydz + xzydv + vzydx$

Auflösung. 1) $S(xdy + ydx) = S(xy^0dy + yx^0dx) = \frac{xydy + yxdx}{dy + dx} = \frac{xy(dy + dx)}{dy + dx} = xy$

2) $S\left(\frac{ydz - zdy}{y^2}\right) = S\left(\frac{yz^0dz}{y^2} - \frac{zy^0dy}{y^2}\right)$

$= \frac{yzdz - zydy}{y^2(dz - dy)} = \frac{yz(dz - dy)}{y^2(dz - dy)} = \frac{yz}{y^2} = \frac{z}{y}$

3) $S(xvzdy + xvydz + xzydv + vzydx)$

$= S(xvzy^0dy + xvyz^0dz + xzyv^0dv + vzyx^0dx)$

$= xvzydy + xvyzdz + xzyvdv + vzyxdx$

$$\frac{}{dy + dz + dv + dx}$$

$= xvzy(dy + dz + dv + dx)$

$$\frac{}{dy + dz + dv + dx} = xvzy$$

§. 62. **Anmerk.** Zusamgesetztere Differentiale, vorzüglich mit Wurzelgrößen, lassen sich wieder am bequemsten durch Transformation integrieren. Ein Paar Beyspiele mögen den Gang der Operation erläutern. Es soll $dx\sqrt{(ax - x)}$ integriert werden.

Man

Man setze $\sqrt{(ax - x)} = p$

$ax - x = p^2$

Diff. $ax - dx = 2pdp$

$dx(a-1) = 2pdp$

$$dx = \frac{2pdp}{a-1}$$

aber $\sqrt{(ax-x)} = p$

$$dx\sqrt{(ax-x)} = \frac{2p^2dp}{a-1}$$

Intg.

$$S(dx\sqrt{ax-x}) = \frac{2p3dp}{(a-1)\times 3dp} = \frac{2p^3}{3a-3}$$

Substit.

$$= \frac{2\sqrt{(ax-x)^3}}{3a-3}$$

Auf eine ähnliche Art integriere man auch die Differentialgröße $dy\sqrt{my^2 - y^4}$

Weil $\sqrt{my^2 - y^4} = \sqrt{y^2(m-y^2)} = y\sqrt{m-y^2}$

so auch $dy\sqrt{my^2 - y^4} = ydy\sqrt{m-y^2}$

Nun sey $\sqrt{m-y^2} = p$

$m - y^2 = p^2$

diff. $-2ydy = 2pdp$

$+ydy = -pdp$

Aber $\sqrt{m-y^2} = p$

$ydy\sqrt{m-y^2} = -p^2dp$

$S(ydy\sqrt{m-y^2}) = -\frac{p3dp}{3dp}$

$= -\frac{1}{3}p^3$

Substit. $S(ydy\sqrt{m-y^2}) = -\frac{1}{3}\sqrt{m-y^2}^3$

§. 63. Zusatz. Wie es Irrationalgrößen giebt, aus denen keine vollkommne Wurzel gezogen werden kann; so giebt es auch Differentiale, die sich nie völlig integrieren lassen; man muß also in solchen

Fäl-

Fällen zur Annäherung durch Hilfe einer unendlichen abnehmenden Reihe seine Zuflucht nehmen.

§. 64. Aufgabe. Von folgenden Größen soll das Integral durch Näherung gefunden werden:
$S\left(\frac{3\,m\,dz}{a+z}\right)$ und $S\left(dy\sqrt{y^2+y}\right)$

I. Auflösung. $\frac{3\,m\,dz}{a+z} = dz\left(\frac{3\,m}{a+z}\right)$

Man dividiere $\frac{3\,m}{a+z}$ wirklich, so wird sich zeigen, daß

$$\frac{3\,m}{a+z} = \frac{3\,m}{a} - \frac{3\,m\,z}{a^2} + \frac{3\,m\,z^2}{a^3} - \frac{3\,m\,z^3}{a^4} + \frac{3\,m\,z^4}{a^5} \cdots\cdots$$

$$\times\, dz = dz$$

$$\frac{3\,m\,dz}{a+z} = \frac{3\,m\,dz}{a} - \frac{3\,m\,z\,dz}{a^2} + \frac{3\,m\,z^2\,dz}{a^3} - \frac{3\,m\,z^3\,dz}{a^4} + \frac{3\,m\,z^4\,dz}{a^5} \cdots\cdots$$

$$S\left(\frac{3\,m\,dz}{a+z}\right) = \frac{3\,m\,z}{a} - \frac{3\,m\,z^2}{2a^2} + \frac{3\,m\,z^3}{3a^3} - \frac{3\,m\,z^4}{4a^4} + \frac{3\,m\,z^5}{5a^5} \cdots\cdots \text{u.s.f.}$$

II. Auflösung. $dy\sqrt{y^2+y} = (y^2+y)^{\frac{1}{2}} dy$

Nun ist $(y^2+y)^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{16}y^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}y^{-\frac{7}{2}} \cdots\cdots$

$$\times\, dy = dy$$

$$dy(y^2+y)^{\frac{1}{2}} = ydy + \frac{dy}{2} - \frac{dy}{8y} + \frac{dy}{16y^2} - \frac{5\,dy}{128y^3} \cdots\cdots$$

$$S\left(dy\sqrt{y^2+y}\right) = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} - \frac{y}{8y} + \frac{y}{16y^2} - \frac{y}{128y^3} \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\frac{1}{y} - \frac{5}{128}\frac{1}{y^2} \text{ u.s.f.}$$

§. 65. Zusatz. Wenn eine Wurzelgröße mehr als zwey Glieder hat, so setzt man, wie bey der Würdenlehre gezeigt worden, mehrere Größen einer einzigen gleich, um zwo Glieder zu bekommen. Sind um diese gehörig erhoben, so kann wieder nach Erheischung des Kalkuls substituiert werden.

§. 66. Zusatz. Es ist auch einleuchtend, daß die unendliche Reihe so eingerichtet werden müße, daß die Glieder immer abnehmen; denn je schneller die Reihe sich ihrer Gränze nähert, desto genauer wird die Rechnung ausfallen.

§. 67. Anmerk. Beständige Größen, die beym Differentiern weggefallen sind, werden nach der Integration durch ein angehängtes $\pm$ C, d. i. $\pm$ Constans, vorgestellt, und lassen sich aus den Umständen der Rechnung leicht wieder bestimmen.

Einige vorläufige Anwendungen der Integralrechnung.

§. 68. Lehrsatz. Der pythagorische Lehrsatz läßt sich sehr kurz und gründlich durch Hilfe der Integralrechnung erweisen.

Satz.

$$ab^2 + bd^2 = ad^2$$

Beweis.

Man werfe Fig. 5. um das rechtwinklichte Dreyeck einen halben Zirkel, so wird die Hypothenuse zum Diameter, und die beyden Lothen zu Sehnen des Zirkels. Weil nun der Diameter eine beständige Größe, und die Sehnen Funktionen voneinander sind, von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine

bey

bey Beybehaltung des rechten Winkels wächst, die andere abnimmt, so heiße man den Diameter = a und die Sehnen = x und = y. Es ist nun aus den Gründen der Geometrie. §. 167. erster Fall

$$af \times fc = bf \times fd$$

Substit. $x \times dx = y \times -dy$

Abgek. $x\,dx = -y\,dy$

Integ. $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2}$

×2 $x^2 = -y^2 + C$

oder $x^2 = C - y^2$

Um die Konstante zu finden, dörfen wir nur die Gleichung für den Fall anwenden, wo x durch lauter Wachsthümer zu a, und eben darum y zu Null wird. Also verwandelt sich die Gleichung in diese

$$a^2 = C - o$$

d. i. $a^2 = C$

Folglich ist die Konstante die Hypothenuse selbst. Nun in der ursprünglichen Gleichung $x^2 = C - y^2$ substituiert, giebt

$$x^2 = a^2 - y^2$$

vers. $x^2 + y^2 = a^2$

oder $ab^2 + bd^2 = ad^2$

§. 69. Erkl. Der beginnende oder sich entwickelnde Theil einer Linie, in so fern sie wachsend vorgestellt wird, kann, im strengsten Sinne genommen, kein Punkt seyn. Der beginnende Theil einer Fläche, eben so wenig eine Linie, und der eines Körpers, eine Fläche seyn; sondern er ist nothwendig im ersten Falle selbst eine kleine Linie; im zweyten selbst eine solche Fläche, und im dritten

ebenfalls ein solches Körperchen. Man nennt dieß das Element einer Linie, einer Fläche eines Körpers.

§. 70. Zusatz. Wenn in einem Zirkel Fig. 6. neben einer perpendikulären Halbsehne g b eine andere h d unendlich nahe gezogen wird, so giebt das Differential des Perpendikels h d, welches h k = d y ist, und das Differential des Segments b c (wir wollen dießmal die Segmente vom Mittelpunkte aus rechnen) welches — b d = — g k = — d x ist mit der unendlich kleinen krummen Linie g h, ein rechtwinklichtes Dreyeckchen, worinn g h, wegen ihrer unendlichen Kleinheit für eine gerade Linie gelten kann. Es ist demnach

$$gh^2 = gk^2 + hk^2$$
$$= (-dx)^2 + dy^2$$
$$= dx^2 + dy^2$$
$$gh = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

das Element der Zirkellinien und andrer derley krumen Linien; weil dieß in allen Punkten, also auch im Anfangspunkte des Zirkels, oder jeder Kurve ist.

§. 71. Erkl. Rektificieren heißt eine gerade Linie finden, die einer andern krummen gegebnen an Länge entweder vollkommen gleich ist, oder ihr so nahe als möglich kömmt.

§ 72. Aufgabe. Ein Stück der Zirkellinie z. B. einen Quadranten zu rektificieren.

Auflösung. Es ist im Zirkel Fig. 4. wenn der Radius für Eins angenommen wird.

$$ab^2 = db \times bh$$

Allein $db = 1 - bc$

$$bh = 1 + bc$$

$db \times bh = 1 - bc^2$ subst. $ab^2 = 1 - bc^2$

und weil $bc = x$

$ab = y$

$y^2 = 1 - x^2$

Wenn nun diese Gleichung differenziert, und in selber der Werth für das obige Kurvaelement gefunden, und gehörig integriert wird, so hat man einen Ausdruck für jedes Stück der Zirkellinie, das einem angenommenen x entspricht. Wird $x = 1$ so ist eben darum ein ganzer Quadrant rektificiert welche Rektifikation in einer abnehmenden unendlichen Reihe ausgedrückt ist. Nun zur Sache

$$y^2 = 1 - x^2$$

diff. $2ydy = -2xdx$

2: $ydy = -xdx$

quad. $y^2 dy^2 = x^2 dx^2$

div. durch $y^2 = 1 - x^2$

$$dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{1 - x^2}$$

$+ dx^2 \quad + dx^2$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{1 - x^2} + dx^2$$

$$= dx^2\left(\frac{x^2}{1 - x^2} + 1\right) = dx^2\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{1 - x^2}\right)$$

$$= dx^2\left(\frac{1}{1 - x^2}\right)$$

$$\sqrt{\quad} \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\left(\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2}}\right),$$

$$= dx\left(\frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = dx\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= dx\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \frac{35x^8}{128}..\right)$$

$$= dx + \frac{x^2\,dx}{2} + \frac{3x^4\,dx}{8} + \frac{5x^6dx}{16} + \frac{35x^8dx}{128}$$

$$S\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9..}{1152}$$

Wird nun $x = 1$ das ist, gleich dem Radius angenommen, so heißt der Ausdruck für einen integrierten Quadranten $1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152}..$ Und weil 4 Quadranten dem Zirkel selbst geben. $4 + \frac{4}{6} + \frac{12}{40} + \frac{20}{112} + \frac{140}{1152}.. = 4 + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{28} + \frac{35}{288}$

§ 73. **Anmerk.** Das schlimste bey dieser Reihe ist, daß die Glieder so langsam abnehmen. Man müßte also, um die Zirkellinie zu rektificieren, einige hundert Glieder berechnen, und zusammaddieren; denn die ersten 3 Glieder enthalten nicht einmal 5 Radiusse, da doch andere Rektifikationen über 6 derselben geben; folglich muß noch mehr als ein ganzes in der fortgeführten Reihe stecken; aber wie lang dörfen so geringhaltige Brüche, die über dieß noch immer abnehmen, fortgesetzt werden, bis das Verlangte erhalten wird? geschweigens erst von einer Approximation zu reden, welche uns in etwas zufrieden stellen könnte.

Schneller fällt die Reihe zusammen, wenn man annimmt, daß der Perpendikel y dem halben Radius gleich sey. Weil der Perpendikel einen Sinus vorstellt, und weil in der Trigonometrie erwiesen worden, daß dem halben Radius als Sinus ein Bogen von 30° entspreche, welcher den dritten Theil des Quadranten ausmacht, so erhält man, wenn der gehörige Werth für x substituiert wird, $\frac{2}{3}$ vom Quadranten, oder den 6ten Theil der Periphere, der dem x als Kosinus gerade gegen-

gegenübersteht, rektificiert, indem sich die Rektification vom Sinustotus rückwärts anfängt, und bis zum Sinus reichet. Man findet aber x so:

$$y^2 = 1 - x^2$$

aber $y = \frac{1}{2}$ und eben darum auch

$$y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = 1 - x^2$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Diesen Werth nun in der Reihe substituiert giebt.

$$S\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{27}}{6\times8} + \frac{3\sqrt{243}}{32\times40} + \frac{5\sqrt{2187}}{112\times128} + \frac{35\sqrt{19683}}{1152\times512} \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\text{Circ.}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{27}}{48} + \frac{3\sqrt{243}}{1280} + \frac{5\sqrt{2187}}{14336} + \frac{35\sqrt{19683}}{589824} \ldots\ldots$$

$$\times 6 \quad \text{Circ.} = \frac{6\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{27}}{48} + \frac{18\sqrt{243}}{1280} + \ldots$$

$$\text{Circ.} = 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{27}}{8} + \frac{9\sqrt{243}}{640} + \ldots$$

Wenn man hier nun etliche Glieder bearbeitet, und ihre Resultate addiert, so erhält man sehr bald 6,28.... Folglich in Diametern 3, 14....

§. 74. An-

§. 74. **Anmerk.** Leibnizens Rektification durch Hilfe der Tangente von 45° gewährt eine Reihe, die noch weit schneller zusammenfällt. Man sehe hierüber Käſtners Analyse oder Klemms Lehrbuch S. 425.

§. 75. **Erkl.** Eine krumme Linie quadrieren, heißt die Fläche finden, die von derſelben entweder ganz begränzt, oder doch wenigſt beſtimmt wird.

§. 76. **Aufgabe.** Man ſoll die allgemeine Quadratur des Zirkels durch Näherung finden.

Auflöſung. Man ſuche allererſt das Flächendifferential des Zirkels. Es ſey nämlich ein Perpendikel oder Sinus Fig 6. ſo nahe an den andern hingezogen, als möglich iſt, ſo werden ſie ein unendlich kleines Parallelogram geben, welches zur Grundlinie $hd = y$ und zur Höhe $bd = dx$ hat. Folglich iſt das Flächenelement des Zirkels ſo wie jeder derley krummen Linie $y \times dx = ydx$. Hat man nun in der Gleichung des Zirkels ein Aequivalent dafür gefunden, und integriert, ſo iſt ein Stück des Zirkels, das zwiſchen einem gewieſen Sinus, ſeinem Koſinus und Sinustotus liegt, wirklich quadriert. Weil der Sinus durch y und der Koſinus durch x ausgedrückt worden, ſo ſetze man $x = 1$ ſo wird $y = 0$ und das quadrierte Stück eben darum ein Quadrant ſeyn. Es iſt demnach in Zirkel wie oben.

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$\times dx$ $\quad ydx = dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ /

$$= dx\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{x^8}{128} \ldots\right)$$

$$y\,dx = dx - \frac{x^2\,dx}{2} - \frac{x^4\,dx}{8} - \frac{x^6\,dx}{16} - \frac{5x^8\,dx}{128} \cdots\cdots$$

$$S(y\,dx) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{x^9}{1152} \cdots$$

$x = r = 1$ gesetzt

$$S(y\,dx) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152} \cdots$$

Eine Reihe welche schnell zusammfällt; wenn sie nun durch 4 multipliciert wird hat man den ganzen Zirkel; also

$$\square \text{ Circ.} = 4 - \frac{4}{6} - \frac{4}{40} - \frac{4}{112} - \frac{4}{1152} \cdots$$
$$= 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{28} - \frac{1}{288} \cdots$$

Und wenn man etliche Glieder nach der Dezimalrechnung bearbeitet, und vom ersten Gliede 4 abziehet, so bekömmt man 3, 14. . . . .

§. 77. Zusatz. Es enthält also der Zirkel gerade so viel Radiusquadrate in der Fläche, als viel Diameter die Peripherie in der Länge enthält.

§. 78. Zusatz. Die obige Reihe $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots$ ist folglich auch dem Inhalt nach, noch so groß als $x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112} - \cdots$

§. 79. Erkl. Kubieren heißt den Inhalt eines Körpers finden, der von einer krummen Fläche entweder ganz oder zum Theil begränzt ist.

§. 80. Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines geradstehenden Kegels allgemein zu bestimmen.

Auflösung. Man bestimme vor allen das Körperelement. Wenn Fig. 7. die Höhe des Kegels x heißt, so ist jeder kleinstmöglichste Wachsthum derselben dx. Da ferner der Durchmesser eines jeden Kegeldurchschnitts, der mit der Basis parallel läuft, eine veränderliche Größe ist, so mag er y heißen, folglich ist ein solcher Zirkel $\frac{y^2 \pi}{4}$ Man nehme endlich, wo man will, im Kegel zwo solche unendlich nahe Zirkelflächen an, so werden diese, als ein unendlich niedrer Zylinder, der nämlich dx zur Höhe hat, das Körperelement enthalten, und sich durch $\frac{y^2 \pi dx}{4}$ ausdrücken lassen, weil dieß das Produkt der Grundfläche in die Höhe ist.

Nun mache man eine Gleichung für irgend eine Eigenschaft des Kegels ausfindig. Es ist z. B. in selbem wegen dem Parallelismus.

$$af : ah = bc : gl$$

heißt aber $ah = a$ und $gl = b$ so ist nach der Substit. $x : a = y : b$

$$ay = bx$$

$$y = \frac{bx}{a}$$

$$\frac{\pi y\, dx}{4} \times \frac{\pi y^2 dx}{4} = \frac{b \pi y x dx}{4a}$$

Für

Für y in der zwoten Seite der Gleichung seinen Werth $\frac{bx}{a}$ substituiert.

Giebt $\frac{\pi y^2 dx}{4} = \frac{b^2 \pi x^2 dx}{4a^2}$

$S\left(\frac{\pi y^2 dx}{4}\right) = \frac{b^2 \pi x^3}{12a^2}$ Man lasse x so lange wachsen, bis es = a wird, so ist

$S = \frac{b^2 \pi a^3}{12a^2} = \frac{b^2 \pi a}{12}$

oder $S = \frac{b^2 \pi}{4} \times \frac{a}{3}$. Wenn nun die Grundfläche $\frac{b^2 \pi}{4} = B$ ist, so giebt die Kubatur des Kegels $B \times \frac{a}{3}$. Das heißt, das Produkt der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe.

§. 81. Anmerk. Ich versprach in der Stereometrie §. 225, hier einen algebraischen Beweis von dem Satze zu geben, daß die Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche sey; oder was eins ist, daß dessen Inhalt der dritte Theil des Produktes aus der Grundfläche in dessen Höhe ausmache. Weil dieß aber in der Elementargeometrie unmittelbar vom Kegel weit schwerer läßt, so glaube ich um so mehr, hier Wort gehalten zu haben, da ich geradezu den obbemeldten Satz vom Kegel erwies.

§. 82. Anmerk. Man merke sich vorzüglich die drey Elemente, weil sie in der höhern Geometrie öfters genutzt werden. Das Linienelement ist demnach $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; Das Flächenelement, $y\,dx$ und das Körperelement. $\frac{y^2 \pi dx}{4}$. Das Oberflächenelement werden wir spater kennen lehrnen.

Höhere

Höhere Geometrie.

§. 1. Erklärung.

Die höhere Geometrie untersucht die Natur, und die Gesetze der krummen Linien, vorzüglich derjenigen, die sich durch Ebnen aus Kegeln ausschneiden lassen.

§. 2. **Zusatz.** Die Gesetze aber, nach welchen eine krumme Linie beschrieben ist, lassen sich größtentheils nur durch Hilfe gerader Linien bestimmen, derer Beschaffenheiten (affectiones) gegen einander uns schon genugsam aus der Elementargeometrie bekannt seyn müssen. Sie haben hier verschiedene Namen, als Ordinaten, Abscissen, Achsen, Durchmesser, Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien u. s. f.

Vorbegriffe der nothwendigsten Hilfslinien.

§. 3. **Erkl.** Wenn zu einer krummen Linie eine gerade, wo immer gezogen wird, so heißt der

Ab-

Abstand eines jeden Punktes der Kurve von einem Punkte der geraden Linie eine Ordinate, welche ebenfalls durch eine andere gerade Linie ausgedrückt wird. Ist der Abstand eines Punktes der Kurve von der geraden Linie der kürzeste unter allen, die von diesen Punkte möglich sind, so nennt man die Ordinate rechtwinklicht, welche auch immer am gewöhnlichsten vorkömmt. Ein abgeschnittnes Stück der geraden Linie von einem bestimmten Anfangspunkt an gerechnet, wird Abscisse genannt; und die Lienie selbst worauf die Abscissen abgeschnitten werden, heißt Abscissenlinie. So sind Fig. 8. ad, gb, fc Ordinaten; ab, ac Abscissen, und ak die Abscissenlinie.

§. 4. **Zusatz.** Je mehr nun Ordinaten gezogen, und je genauer selbe sammt ihren Abscissen gemessen werden, desto richtiger wird auch das Gesetz angegeben, nach welcher so eine krumme Linie beschrieben ist.

§. 5. **Erkl.** Wenn die Kurve eine merkliche Höhlung bildet, oder gar in sich zurückkehrt, so, daß man bequem von jedem Punkt zum andern gerade Parallellinien ziehen kann, welche alle rechtwinklicht in zween gleiche Theile zu theilen eine andere gerade Linie in Stande ist, so heißt diese letztere Linie die Achse der Kurve, und dient zugleich für die Abscissenlienie. Im Zirkel thut dieß der Diameter, Fig. 9. folglich ist derselbe nach der Sprache der höhern Geometrie die Achse des Zirkels, jeder Perpendikel darauf eine Ordinate, und die Segmente der Achse — Abscissen.

§. 6. **Willk. Satz.** Weil die Ordinaten, und Abscissen Funktionen von einander sind, welche oft unter dem Namen Koordinaten begriffen sind, so werden sie im Kalkul durch die letzten Buchstaben des Alphabets ausgedrückt. Gemeiniglich bedeutet y eine Ordinate und x seine Abscisse.

§. 7. **Anmerk.** Die Alten nannten die ganzen Linien, von einem Punkte der Kurva bis zum andern, Ordinaten, und ihre Hälften, von der Kurve bis zur Achse, Semiordiaten. Die Neuern aber, welche meist nur die Hälfte einer solchen krummen Linie betrachten; weil die andere Hälfte, wegen der Gleichheit, die nämlichen Eigenschaften haben muß, nur, daß in Rücksicht der entgegengesetzten Lage, wie schon einestheils vom Zirkel in der Trigonometrie gemeldet worden, die Semiordiaten negativ sind, heißen diese Hälften schlechtweg Ordinaten, und wenn je von den ganzen Ordinaten irgend die Rede ist, werden selbe von ihnen Doppelordinaten genennt.

§. 8. **Erkl.** Aus dem Verhältnissen der Ordinaten zu ihren Abscissen werden mit Zuziehung einer oder mehrern beständigen Größen Gleichungen formiert, die die Gleichungen für die krummen Linien heißen. So wäre die für den Zirkel: $y^2 = x(a - x) = ax - x^2$, wo a die Achse bezeichnet. Die Kurven nun, bey welchen das angeht heißen algebraisch; die übrigen, woraus sich keine Gleichung erheben läßt, trauscendentisch. Bey einer schneckenartig gewundnen Linie thun Ordinaten und Abscissen keine guten Dienste; folglich ist es auch nicht wohl möglich, für sie eine Gleichung ausfindig zu machen. Sie wird daher mit Recht zu den transcendentischen Linien gerechnet.

Die algebraischen Linien werden ferner eingetheilt in Geschlechter oder Ordnungen, und endlich noch in Familien. Die Geschlechter werden nach

der

der Anzahl der Abmessungen, die in den Gleichungen der Linien vorkommen, benennet, zwo Abmessungen geben eine Linie von der ersten Ordnung oder Geschlecht: drey von der zwoten u. s. f. Zu ein und der nämlichen Familie gehören endlich alle Linien, deren Gleichungen so aussehen, daß überall die nämlichen Glieder obwalten, wenn sie auch gleich in ihren Exponenten verschieden sind.

Z. B. $z^2 = av$ und $y^2 = bx$ gehören zu einem Geschlechte; weil überall zwo Abmessungen statt haben. $\xi^3 = c^3x^2$ und $\xi^2 = (c - x)x$ sind aber von einer Familie.

§. 9. Erkl. Die Tangente ist, wie in der Geometrie beym Zirkel, eine gerade Linie, die die Kurve in einem einzigen Punkte berührt; aber sie hat hier wieder, wie in der Trigonometrie, eine gewiße Länge, und wird so weit auf einer Seite fortgezogen, bis sie die verlängerte Abscisse erreicht, welche der Ordinate des Berührungspunkts entspricht. Diese verlängerte Abscisse ist die Subtangente. Ein aus der Abscissenlinie auf den Berührungspunkt der Tangente hingefällter Perpendikel heißt die Normallinie. Das Stück endlich der Abscissenlinie zwischen der Ordinate des Berührungspunktes und der Normal wird die ~~Subtangente~~ Subnormal genennt. So ist im Zirkel Fig. 10. a m die Tangente, a p die Subtangente, m q die Normal, welche im Zirkel allemal der Radius selbst ist, wie aus der Elementargeometrie bekannt ist, und p q die Subnormal, welche Linien alle bey jeder krummen Linie auf eine ähnliche Art gezogen werden.

Von

Von Kegelschnitten.

§. 10. **Erkl.** Jeder Kegel läßt sich durch eine unebne Fläche unzählige Mal; durch eine ebne Fläche aber nur fünfmal schneiden, als

1) durch die Achse des Kegels, welches ein Dreyeck giebt, und folglich in die Elementargeometrie gehört, wie Fig. 11. lhs;

2) parallel mit der Grundfläche des Kegels, wo der Schnitt ein Zirkel wird, der ebenfalls schon größtentheils in der Elementargeometrie abgehandelt worden, z. B. abc;

3) parallel mit einer Seitenlinie des Kegels, wodurch die erste Linie der höhern Geometrie entsteht, welche den Namen der **Parabel** hat; als hgk,

4) parallel mit der Achse des Kegels, in welchen Fall man mehrmals eine krumme hieher gehörige Linie erhält, die **Hyperbel** heißt, nämlich vdf

5) endlich durch einen Schnitt, der weder mit einer Seite, weder mit der Grundfläche noch mit der Achse parallel läuft, der die **Ellipse** giebt, wie pmq.

§. 11. **Anmerk.** Die Ursache der Benennungen, der drey letztern Kegelschnitte, denn die übrigen kommen hier alle nicht in Betracht, werden wir weiter unten bey jeder dieser Linie angeben;

Von der Parabel.

§. 12. **Lehrsatz.** In der Parabel ist überall das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkt der Abscisse in eine bestimmte beständige Größe, die

so-

sowohl hier, als in denen übrigen beyden Linien der Parameter genannt, und durch seinen Anfangsbuchstaben p ausgedrückt wird.

Satz.

$$y^2 = px$$

Beweis.

Man zeichne diese krumme Linie in einem Kegel Fig. 12., und schneide durch einen Zirkel, der mit der Grundfläche des Kegels parallel geht, die Parabel, wo man will, so kann der Diameter des Zirkels so gezogen werden, daß eine gemeinschaftliche Ordinate des Zirkels, und der Parabel rechtwinklicht auf einen gemeinschaftlichen Punkt der beyden Achsen fällt. Es ist nun aus der Eigenschaft des Zirkels

$$pm^2 = cp \times pb.$$

Man suche nun für cp und pb andere Werthe, welches geschehen kann, wenn von dem Scheitel der Parabel — so heißt der Anfangspunkt eines Kegelschnitts — eine Parallellinie mit der Achse des Zirkels bis an die andere Seitenlinie gezogen wird. Es ist daher $cp = da$ wegen Parallelismus. Ferner ist aus gleichem Grunde,

$\triangle dfa \sim \triangle apb$ wegen innern und äußern Winkeln.

daher $df : da = ap : pb$

$$\frac{da \times ap}{df} = pb$$

In der obigen Gleichung substituiert, giebt

$$pm^2 = \frac{da \times da \times ap}{df} = \frac{da^2}{df} \times ap$$

Da aber der Quotus wegen den beständigen Größen da und df ebenfalls beständig ist, und p heißen kann, gleichwie die Ordinate pm durch y und die Abscisse ap durch x ausgedruckt wird, so ist es nach der Substitution.

$$y^2 = px$$

§. 13. **Anmerk.** Der Name Parabel (παραβολη) kömmt von der völligen Gleichheit des Quadrats der Ordinate und des Produkts aus der Abscisse in den Parameter her. In der Ellipse wird, wie wir in der Folge sehen werden, etwas davon abgehen, daher ελλειψις (Mangel) und in der Hyperbel hingegen ein Ueberfluß vorhanden seyn, welches ebenfalls das Wort υπερβολη ausdrückt.

§. 14. **Zusatz.** Es ist daher der Parameter die dritte Proportionallinie zur Abscisse und Ordinate, weil die Gleichung $y^2 = px$ in diese stätige Proportion $x : y : p$ aufgelöset werden kann. Er läßt sich demnach in einer gegebnen Parabel leicht durch Zeichung als eine einzige beständige Linie sichtbar machen. Man beschreibe nur Fig. 13. auf der Achse einen halben Zirkel, der durch dem Scheitelpunkt geht, und ziehe aus jenem Punkt der Parabel, wo sie der Zirkel schneidet, eine Ordinate, so ist das erste Segment der Zirkelachse die Abscisse und das zweyte der Parameter, weil nur in diesem Falle $y^2 = xp$ seyn kann.

§. 15. **Lehrsatz.** Der Parameter ist auch gleich dem Produkte aus der Summe was immer für zwoer Ordinaten, in ihre Differenz, wenn es durch die Differenz ihrer Abscissen dividiert worden.

Satz.

$$\frac{(Y + y)(Y - y)}{X - x} = p$$

Be-

Beweis.

$$(Y + y) \times (Y - y) = Y^2 - y^2$$

aber $Y^2 = pX$

und $y^2 = px$

subst. $(Y + y) \times (Y - y) = pX - px = p(X - x)$

$$: (X - x) \quad \frac{(Y + y) \times (Y - y)}{X - x} = p$$

§. 16. **Zusatz.** Weil die Gleichung für die Parabel von der ersten Ordnung ist, folglich zwo Abmessungen hat; denn es wird nach Ausziehung der Wurzel $y = \pm \sqrt{px}$, so kann die Ordinate positiv und negativ seyn: das heißt, jede Abscisse hat in der Parabel zwo gleiche entgegengesetzte Ordinaten.

§. 17. **Zusatz.** Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Abscissen; denn weil in jedem Punkt der Parabel

$y^2 = px$ seyn muß

so ist auch $Y^2 = pX$

$y^2 : Y^2 = px : pX$

$y^2 : Y^2 = x : X \quad : p$

§. 18. **Zusatz.** Die Parabel ist keine in sich zurückkehrende Linie, wie der Kreis; denn wäre sie es, so müßte sich in dem Fall, wenn die Ordinate zu Null wird, noch ein wahrer positiver Werth für die Abscisse finden lassen, wie in der Gleichung für den Zirkel.

Dort ist $y^2 = ax - x^2$

$y^2 = o$

$o = ax - x^2$

$x^2 = ax$ und $x = a$, wo die Abscisse der ganzen Achse gleicht. Hier aber in $y^2 = px$, wenn für y, folglich auch für $y^2 = o$ gesetzt wird giebt es $o = px$

$: p \quad o = x$ Das ist, die Achse der Parabel wird nur im Anfang, und dann nicht mehr geschnitten; denn da trifft es zu, daß wenn $y = o$ auch $x = o$ bleibt; und umgekehrt, wenn $x = o$ so wird auch $y = o$ seyn.

§. 19. **Anmerk.** Man könnte dieß auch daraus beweisen, weil es in der Parabel keine größte Ordinate, wie im Kreise giebt. Denn man verfahre mit der Gleichung auf eine ähnliche Art, wie §. 50 mit der des Zirkels.

$y^2 = px$

diff. $2ydy = pdx$

$dy = \frac{pdx}{2y}$

$dx: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$

$\times 2y \quad o = \frac{p}{2y}$

so ist $o = p$. Also würde die Parabel nur in dem Fall eine größte Ordinate verstatten, wenn sie keinen Parameter hätte, das heißt, wenn sie keine Parabel wäre, welches ein baarer Widerspruch ist.

§. 20. **Zusatz.** Es wachsen demnach die Koordinaten, als Funktionen von einander, bis ins Unendliche fort.

§. 21.

§. 21. **Erkl.** Jener Punkt auf der Achse der Parabel, und eines jeden Kegelschnitts, wo der halbe Parameter die Ordinate abgiebt, wird der Brennpunkt, und die Abscisse Brennweite, Fokallänge genannt; die Ursache dieser Benennung wird in der Katoptrick angegeben.

§. 22. **Lehrsatz.** Die Brennweite in der Parabel, ist dem 4ten Theil des Parameters gleich.

Voraussetzung.

$$y = \frac{1}{2} p$$

Satz.

$$x = \frac{1}{4} p$$

Beweis.

In jedem Punkt der Parabel ist.

$$y^2 = p x$$

aber	y	$= \frac{1}{2} p$
also	y^2	$= \frac{1}{4} p^2$
	$p x$	$= \frac{1}{4} p^2$
$: p$	x	$= \frac{1}{4} p$

§. 23. **Aufgabe.** Eine Parabel geometrisch zu beschreiben.

Auflösung. Man ziehe Fig. 14. eine Achse von unbestimmter Länge, schneide von einem angenommenen Scheitelpunkt s beliebige gleiche Theile ab, und werfe einen halben Zirkel darüber, so wird die

Ordinate auf dem ersten Theilungspunkte, der halbe Parameter, der erste Theil selbst, die Fokallänge, und die letzten vier Theile zusammengenommen, der Parameter p seyn; Denn

$$\text{oder } mp^2 = ap \times pd \quad \text{weil } mp = y$$
$$y^2 = xp \qquad ap = x$$
$$\text{oder } y^2 = 1 \times 4 = 4 \quad \text{und } pd = p$$
$$y = 2, \text{ d. i. } \tfrac{1}{2}p$$

Wenn nun mehrere Halbzirkel von verschiedner Größe auf der Achse beschrieben werden, die sich im Scheitel einander berühren, so sind alle Ordinaten, die man in der Entfernung des Parameters von den verschiednen Endpunkten der Zirkelachsen zieht, gemeinschaftliche Ordinaten der Parabel, weil überall $y^2 = px$ ist.

§. 24. **Lehrsatz.** Zwo Sehnen (chordæ) vom Scheitel der Parabel ausgezogen, verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Produkten der zugehörigen Abscissen in die Summe eben dieser Abscissen und des Parameters.

Satz. Fig. 19.

$$c : C = \sqrt{x(x+p)} : \sqrt{X(X+p)}$$

Beweis.

Es ist $c^2 = x^2 + y^2$
eben so wie $C^2 = X^2 + Y^2$

$$c^2 : C^2 = (x^2 + y^2) : (X^2 + Y^2)$$
$$\text{aber } y^2 = px$$
$$\text{und } Y^2 = pX$$
$$\text{subst. } c^2 : C^2 = (x^2 + px) : (X^2 + pX)$$
$$\text{oder} = x(x+p) : X(X+p)$$
$$\sqrt{\quad} \quad c : C = \sqrt{x(x+p)} : \sqrt{X(X+p)}$$

§. 25.

§. 25. **Lehrsatz.** Die Entfernung eines jeden Punktes der Parabel vom Brennpunkt, oder der Brennstrahl ist gleich der entsprechenden Abscisse sammt der Fokallänge.

Satz. Fig. 15.

$$mf = x + \tfrac{1}{4}p$$

Beweis.

$$mf^2 = fp^2 + mp^2$$

subst. $mf^2 = (x - \tfrac{1}{4}p)^2 + y^2$

und weil $y^2 = px$

$$mf^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2 + px$$

abgek. $mf^2 = x^2 + \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2$

$$mf = x + \tfrac{1}{4}p$$

§. 26. **Zusatz.** Daraus folgten wieder einige Arten Parabeln zu beschreiben. Sie alle anzuführen wäre zu weitläuftig, da sie ohnedem in den meisten mathematischen Lehrbüchern anzutreffen sind.

§. 27. **Aufgabe.** Durch einen gegebnen Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe Fig. 16. den Brennstrahl auf den gegebnen Punkt hin, ferner von diesen Punkt aus eine Parallellinie mit der rückwärts verlängerten Achse, und theile den Winkel welchen der Brennstrahl und die Parallellinie macht, in zween gleiche Theile, so wird die Theilungslinie, wenn man sie so lange fortzieht, bis selbe die verlängerte Achse erreicht, die verlangte Tangente seyn.

Beweis.

Zu einer Tangente wird erfodert, daß sie die Kurve nur in einem einzigen Punkt berühre, und nicht schneide. Schnitte sie allenfalls die Kurve, so müßte noch ein Punkt dieser geraden Linie, weil sie doch wenigst eine tangentenartige Lage hätte, früher oder später in der Parabel liegen, wenn man beyde weit genug verlängert. Daß aber dies nicht seyn könne, wird so erwiesen. Man schließe den getheilten Winkel vom Brennpunkt an, zu einem gleichschenklichten Dreyeck. Folglich ist auch diese Schlußseite rechtwinklicht in zween gleiche Theile getheilt. Endlich ziehe man von dem Endpunkt des äußern Schenkels eine Parallellinie mit der Ordinate bis an die verlängerte Achse. Es ist nun aus der Konstruktion.

$$\begin{array}{l} dm = fm = x + \frac{1}{4} p \\ dm = bq = ba + x \end{array}$$

$$x + \frac{1}{4} p = ba + x \quad \text{und abgek.}$$

$$\frac{1}{4} p = ba$$

Wenn nun z. B. o ein Punkt in der Parabel wäre, so müßte auch $fo = x + \frac{1}{4} p$ seyn. Aber dieß ist unrichtig; Denn

$$no = br = ba + ar = \frac{1}{4} p + x$$

Allein $no < do$ als Kathet und Hypothenus: setzen wir es sey no um z kleiner als do

folglich $no = do - z$

$$\frac{1}{4} p + x = do - z$$

Aber $do = fo$; denn das Dreyeck fdo ist gleichschenklicht, weil der Perpendikel oc die Grundlinie fd in gleiche Theile theilt.

subst. $\frac{1}{4}$ p + x = fo — z Welches der Eigen-
$\frac{1}{4}$ p + x + z = fo schaft des Brennstrahls
der Parabel widerspricht. Den nämlichen Widerspruch findet man auch, wenn ein Punkt oberhalb der Berührung angenommen wird. Es ist also vollkommen erwiesen, daß t m eine wahre Tangente sey.

§. 28. Zusatz. Die Tangentialwinkel, das heißt jene Winkel, die der Brennstrahl, und die verlängerte Parallellinie mit der Tangente machen, sind einander gleich; denn es ist Fig. 16.

x = y wegen der Theilung.

s = y als Vertikalw.

Also = x = s

§. 29. Anmerk. Es ist ein in der Physik erwiesener Satz, daß der Ausfallwinkel eines irgendwo abgeprellten Lichtstrahls eben so groß sey, als der Einfallwinkel. Wenn man nun eine genau verfertigte, und gut polierte Paraboloide, d. i., einen Körper, dessen innere Höhlung von der Umwälzung einer Parabel um ihre Achse gebildet worden, so gegen die Sonne hält, daß alle Strahlen parallel mit der Achse einfallen, so müssen sie sich sämmtlich im Brennpunkte vereinigen, und hier nach der Größe eines solchen parabolischen Brennspiegels eine ausserordentliche Hitze verursachen. Denn die Richtung eines jeden Punkts der Paraboloide stellt dessen Tangente vor; also würde der Strahl unter dem nämlichen Gesetz auf der Tangente abprellen, wie auf dem ihr korrespondierenden Parabelpunkte. Da aber die Tangentialwinkel, d. i., der Ein- und Ausfallwinkel des Strahls neben ihrer erwiesnen Gleichheit auch noch die Eigenschaft haben, daß ein Schenkel parallel mit der Achse fortläuft, und der andere zum Brennstrahl wird, so müssen nothwendig alle parallel einfallenden Strahlen auf den Brennpunkt hingeleitet, und dort vereiniget werden.

Umgekehrt läßt sich auch aus den nämlichen Gründen behaupten, daß ein in Brennpunkt gestellter leichtender Körper alle davon ausgehenden Strahl parallel mit der Achse fort-

fortpflanze, wie die aus Pappendekel gemachten Paraboloiden in einigen Studierstuben sattsam beweisen.

Eben so vortheilhaft sind auch die parabolischen Sprach- und Hörröhre, weil im ersten Falle die Schallstrahlen, welche gleiches Gesetz der Abprellung beobachten, parallel bis zu dem Ohre des Horchenden fortgestoßen; im zweyten Falle hingegen eine Menge Parallelstrahlen des Schalls aufgefangen, und in dem Brennpunkte am Ohre konzentriert werden.

§. 30. **Lehrsatz.** Die Subtangente ist der doppelten Abscisse gleich.

Satz. Fig. 16.

$$\text{Subt.} = 2x.$$

Beweis.

$\triangle$ tfc $=$ $\triangle$ cdm wegen Wechsel- und Vertikalw.
$\triangle$ fmc $=$ $\triangle$ cdm

$\triangle$ tfc $=$ $\triangle$ cdm also

$$tf = dm = fm \quad \text{oder}$$
$$ta + af = aq + af$$
$$ta = aq$$
$$\text{aber} \quad ta + aq = tq$$
$$aq + aq = tq$$
$$2aq = tq$$
$$2x = \text{Subt.}$$

§. 31. **Lehrsatz.** Die Tangente in der Parabel ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe des vierfachen Quadrats der Abscisse, und des Produkts der Abscisse in den Parameter.

Satz. Fig. 16.

$$\text{Tang.} = \sqrt{4x^2 + px}$$

Be-

Beweis.

$$t\,m^2 = t\,q^2 + q\,m^2!$$

subſtit. $\quad Tang^2 = (2x)^2 + y^2$

$$Tang^2 = 4x^2 + px$$

$$Tang = \sqrt{4x^2 + px}$$

§. 32. **Anmerk.** Auf eine ähnliche Art laſſen ſich auch die Normal und Subnormal beſtimmen. Wir wollen aber dieß durch die Differentialrechnung leiſten.

§. 33. **Lehrſatz.** Die Differentialausdrücke der Tangente, Subtangente, Normal- und Subnormallinie, deren Aequivalente nachher in den differenzierten Gleichungen dieſer krummen Linien geſucht werden müſſeu, ſind nicht nur für die Parabel, ſondern für alle allgebraiſchen Kurven folgende:

Satz.

1) $Tang = \dfrac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$

2) $Subtang = \dfrac{y\,dx}{dy}$

3) $Norm. = \dfrac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$

4) $Subnorm. = \dfrac{y\,dy}{dx}$

Beweiſe.

Man nehme an, daß die beyden Ordinaten Fig. 17. PM und pm einander unendlich nahe liegen, ſo wird $Mr = dx$ und $rm = dy$ ſeyn. folglich $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, weil ſich die unend-

endlich kurze Linie M m für eine gerade Hypothenuse ansehen läßt. Alle vier Dreyecke t M q, t M P, P M q und M r m sind ferner wegen rechten Winkeln, und Parallelismus einander ähnlich seyn, denn wegen rechten und gemeinschaftlichen Winkel.

t M P ∽ t M q
t M P ∽ M r m wegen gleichen Winkeln bey t und M.

t M q ∽ M r m
Endlich t M q ∽ P M q aus obigen Gründen.

Also M r m ∽ P M q.
Es ist erstens, wegen denen ähnlichen
△△ t M P und M r m

$$tM : PM = Mm : rm$$

$$\text{Tang} : y = \sqrt{dx^2 + dy^2} : dy$$

$$\text{Tang} : = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$$

Zweytens wegen den nämlichen △△

$$tP : PM = Mr : rm$$

$$\text{Subtang} : y = dx : dy$$

$$\text{Subtang} : = \frac{y\,dx}{dy}$$

Drittens wegen t M q und M r m

$$PM : Mq = Mr : Mm$$

$$y : \text{Norm.} = dx : \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\text{Norm.} = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$$

Viertens wegen eben diesen Dreyecken

$$PM : Pq = Mr : rm$$

$$y : \text{Subnorm.} = dx : dy$$

$$\text{Subnorm.} = \frac{y\,dy}{dx}$$

§. 34. An-

§. 34. **Anmerk.** Um sich zu überzeugen, daß man durch diese Ausdrücke, die nämlichen Werthe erhalte, als wie oben aus dem Verhältniß der Linien selbst zu einander, wollen wir die Subtangente auch auf diese Art bestimmen. Normal und Subnormal suchen wir nachher ohnehin durch die eben gefundenen Differentialformeln.

$$y^2 = px$$

diff. $$2ydy = pdx$$

:p $$\frac{2ydy}{p} = dx$$

X y $$\frac{2y^2dy}{p} = ydx$$

:dy

$$\frac{2y^2}{p} = \frac{ydx}{dy}$$

aber $$\text{subtang} = \frac{ydx}{dy}$$

$$\text{subtang} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$$

§. 35. **Lehrsatz.** Die Normal der Parabel ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe des Produkts der Abseisse in den Parameter, und des vierten Theils des Parameterquadrats.

Satz.

$$\text{Norm} = \sqrt{px + p^2}$$

$$4$$

Beweis.

$$y^2 = px$$

diff. $2ydy = pdx$

quad. $4y^2dy^2 = p^2dx^2$

$+ 4y^2dx^2 + 4y^2dx^2$

$$4y^2dy^2 + 4y^2dx^2 = p^2dx^2 + 4y^2dx^2$$

4: $y^2dy^2 + y^2dx^2 = \frac{1}{4}p^2dx^2 + y^2dx^2$

abgek. $y^2(dy^2 + dx^2) = (\frac{1}{4}p^2 + y^2)dx^2$

$= (\frac{1}{4}p^2 + px)dx^2$

$\surd$ $y\sqrt{dy^2 + dx^2} = dx\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + px}$

: dx $\frac{y\sqrt{dy^2 + dx^2}}{dx} = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$

aber $\frac{y\sqrt{dy^2 + dx^2}}{dx}$ = Norm.

Norm. $= \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$

§. 36. **Lehrsatz.** Die Subnormal in der Parabel ist dem halben Parameter gleich.

Satz.

Subnorm. $= \frac{1}{2}p$.

Beweis.

$$y^2 = px$$

diff. $$2ydy = pdx$$

:2 $$ydy = \frac{pdx}{2}$$

;dx $$\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}p$$

Aber $$\frac{ydy}{dx} = \text{Subnorm.}$$

Folglich $$\text{Subnorm.} = \frac{1}{2}p$$

§. 37. Anmerk. Um den Nutzen einer, oder der andern dieser Linien anschauend zu machen, wollen wir folgende Aufgabe herseten. In einer Gegend von ziemlich ebener Aussicht sollte eine Sternwarte angelegt werden. Doch so, daß man wenigst einen Horizont von 20 geographischen Quadratmeilen von der Erdkugel vor sich liegen hätte, wie hoch müßte sie werden?

Auflösung. Man nehme an, die Erde sey eine wahre Kugel. Wenn die Sternwarte c d Fig. 18. rückwärts durch die Erde verlängert würde, so gäbe sie unfehlbar eine Erdachse ab. Die letzten Sehstrahlen des Auges, welche noch auf der Erdkugel aufliegen wie a c, sind, ihre Brechung abgerechnet, als eben so viele Tangenten ringsum anzusehen, wovon der Thurm c d sammt der kleinen Abscisse d b, die einem solchen Bogen a d bis zur Tangente entspricht, die Subtangente ist. Ist nun dieses x bekannt, so weiß man eben darum auch die Subtangente, welche, wenn x davon abgezogen worden, die verlangte Höhe des Thurms giebt. Es kann aber die Abscisse so gefunden werden. Man bestimme in der differentierten Zirkelgleichung das Oberflächenelement, integriere es, und setze das Integral, wo das x sicher vorkommen muß, denen 20 Meilen gleich, so läßt sich der Werth der entsprechenden Abscisse in rheinländischen Schuhen ausdrücken. Es ist aber das Oberflächenelement $2\pi y \sqrt{(dx + dy^2)}$, weil $\frac{2\pi \ \pi y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ jeden Zirkel des runden Körpers vorstellt, und den unendlich kleinen Abstand von einem Zirkel zum andern. Nun ist die Zirkelgleichung,

diff. $y^2 = ax - x^2$

$2ydy = adx - 2xdx$

quad. $4y^2dy^2 = a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2$

: $4y^2 = 4ax - 4x^2$

$$dy^2 = \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2}$$

$$+ dx^2 \qquad + dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2} + dx^2$$

$$= \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2 + 4axdx^2 - 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2}$$

Abgek. $dy^2 + dx^2 = \frac{a^2 dx^2}{4ax - 4x^2}$

$$\sqrt{dy^2 + dx^2} = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

$$\times 2y \qquad = \qquad \times 2\sqrt{ax - x^2}$$

$$2y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\,dx$$

$$\times \pi \qquad\qquad \times \pi$$

$$2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\pi\,dx$$

$$S(2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\pi x)$$

Es ist also $a\pi x$ der Ausdruck für jeden Oberflächenabschnitt auf der Kugel. Auf der Erdkugel ist $a = 1720 \times 23664$ rheinländ. Schuhe.

Also $a\pi x = 20$ Meilen

$x = \frac{20}{a\pi}$ Dieß nun in rheinländischen Schuhen ausgedrückt.

$$x = \frac{23664 \times 23664 \times 20}{1720 \times 23664 \times 3{,}141}$$

$$= \frac{23664 \times 2}{172 \times 3{,}141} = \frac{23664}{86 \times 3{,}141},$$

$$= \frac{11832}{43 \times 3{,}141} = 87{,}6$$

Ende

Endlich berechne man auch die Subtangente einer Kugel und ziehe das x davon ab, so hat man die verlangte Höhe des Thurms.

$$y^2 = ax - x^2$$

$$2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx$$

$$\frac{2y\,dy}{a-2x} = dx$$

x y $$\frac{2y^2\,dy}{a-2x} = y\,dx$$

: dy $$\frac{2y^2}{a-2x} = \frac{y\,dx}{dy} = \text{Subtang.}$$

allein $y^2 = ax - x^2$

subst. $$\frac{2(ax - x^2)}{a-2x} = \text{Subt.}$$

Das x abgezogen.

$$\frac{2(ax - x^2)}{a-2x} - x = \frac{2ax - 2x^2 - ax + 2x^2}{a-2x}$$

$$= \frac{ax}{a-2x}.$$ In Zahlen ausgedrückt.

$$\frac{1720 \times 23664 \times 87{,}6}{1720 \times 23664 - 2 \times 87{,}6}$$

$$= \frac{3565502208}{40702080 - 175{,}2}$$

$$= \frac{3565502208}{40701904{,}8} = 87{,}6 \text{ Schuhe.}$$

38. **Anmerk.** Dergleichen Berechnungen lassen sich auch zur See bey der Schiffahrt nutzen, wenn man erfahren will, wie viele Meilen man aus einer gewißen Höhe des Mastkorbes überblicken könne, oder wie hoch man den Mastkorb hängen müßte, um in diese, oder jene Ferne blicken zu können.

§. 39. Aufgabe. Eine Parabel rektificieren.

Auflösung. Da das Element jeder krummen Linie $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, so suche man dieses Ausdruckes Aequivalent in der differentierten Parabelgleichung, und integriere es, und man hat die Rektifikation eines Bogens, der einer angenommenen Abscisse, oder Ordinate entspricht.

$$y^2 = px$$

diff. $2ydy = pdx$

quad. $4y^2dy^2 = p^2dx^2$

aber $4y^2 = 4px$

div.

$$dy^2 = \frac{pdx^2}{4x}$$

$$+dx^2 \quad +dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{pdx^2}{4x} + dx^2 = dx^2\left(\frac{p}{4x} + 1\right)$$

$$= dx^2\left(\frac{p+4x}{4x}\right), \text{ und } \sqrt{\left(dy^2 + dx^2\right)},$$

$$= dx\sqrt{\left(\frac{p+4x}{4x}\right)} = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\left(p+4x\right)}$$

Nun ziehe man nach dem binomischen Lehrsatz, aus $p + 4x$ die Quadratwurzel durch eine unendliche Reihe aus, multiplicire am Ende diese gefundene Reihe durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ und integriere sämmtliche Produkte, so hat man die verlangte Rektifikation.

tion. Es ist $(p + 4x)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}} \times 4x + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2} p^{-\frac{3}{2}} \times 16x^2 +$

$\frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3} p^{-\frac{5}{2}} \times 64x^3 \ldots$

$= p^{\frac{1}{2}} + \frac{2x}{p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^3}{p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$

Die Reihe durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ multipliciert.

$= \frac{p^{\frac{1}{2}} dx}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x\,dx}{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2\,dx}{2p^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4x^3\,dx}{2p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}} \ldots$

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{p^{\frac{1}{2}}} -$

$\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}dx}{p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$

$S\sqrt{dx^2 + dy^2} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}} -$

$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}p^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots\ldots$

oder $= p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} \ldots$

§. 40. **Anmerk.** Das verdrüßlichste bey dieser Reihe ist, daß sie so langsam abnimmt: man muß also, um einen Parabelbogen mit ziemlicher Akurateſſe zu bestimmen, sehr viele Glieder mühsam berechnen. Auch die Reihe, wo statt x das y beybehalten wird, ist nicht viel vortheilhafter. Sie heißt

$y + \frac{2y^2}{3p^2} - \frac{2y^5}{5p^4} + \frac{4y^7}{7p^6} - \frac{10y^9}{9p^8} \ldots$

Ist nun hier der Parameter klein, und die letzte Ordinate groß, so fällt die Reihe eben so langsam zusammen.

Freylich erhielte man eine schnelle konvergirende Reihe, wenn aus dem Binomium $p + 4x$ in verkehrter Ordnung, nämlich aus $4x + p$ die Wurzel ausgezogen, dann durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ multiplicirt, und integriert würde; allein man kömmt im zweyten Gliede auf ein logarithmisches Differenzial $\frac{px^{-1}dx}{8}$, welches sich durch die gemeinen Regeln schlechterdings nicht integrieren läßt, sondern sein Integral mit Zuziehung der Subtangente der Logistik, einer gewißen krumen Linie, gesucht werden muß. Weil wir aber von dieser Linie noch nichts sagen konnten, so sind wir gezwungen diese Art von Rektifikation auf weiters zu verschieben.

§. 41. **Anmerk.** Es giebt eine Art von Parabel, in welcher $y^3 = px^2$, oder zum Unterschiede $\Phi^3 = pz^2$ die sich vollkommen quadrieren läßt. Man nennt sie von dessen Erfinder Wilhelm Neil, einem Britten, die Neilische Parabel. Ihre Beschreibung oder Konstruktion geht so vor sich. Man zeichne erst eine Apollonische Parabel (denn so heißt der ächte Kegelschnitt im Gegensatze der neilischen Parabel) errichte auf dem Scheitelpunkt der Achse einen Perpendikel, welcher zu beyden Seiten unbestimmt verlängert werden kann, und lege in eben dem Scheitelpunkt einen rechten Winkel so an, daß ein Schenkel die Kurve berühre, oder auch schneide, das heißt, eine Sehne abgebe. Wenn nun die Ordinate des Berührungspunkts bis zu dem andern Schenkel verlängert wird, so erhält man einen Ort in der neilischen Parabel. Legt man mehr dergleichen rechte Winkel an, so bestimmen sich auch mehr Punkte, wodurch die Kurve gezogen werden muß. Es soll nun erwiesen werden, daß in dieser Linie der Kubus der Ordinate gleich ist dem Produkte des Parameters in das Quadrat der Abscisse.

Satz. Fig. 20.

$$\Phi^3 = pz^2$$

Beweis.

Es ist wegen rechten Winkel, worüber ein halber Zirkel geschwungen werden kann

$$qm : aq = aq : rq$$

quad. $$qm^2 : aq^2 = aq^2 : rq^2$$

Da nun sonst $qm = y^2 = px$

aber dießmal $x = aq = fr = \Phi$ ist

so ist auch $qm^2 = p\Phi$

$qr = ah = z$

und $aq = hr = \Phi$

Substit. $p\Phi : \Phi^2 = \Phi^2 : z^2$

$\Phi^4 = p\Phi z^2$

$:\Phi$ $\Phi^3 = pz^2$; was zu erweisen war. Nun zur Rektifikation.

Die Gleich. diff. $3\Phi^2 d\Phi = 2pzdz^2$

Quad. $9\Phi^4 d\Phi^2 = 4ppz^2 dz$

div. durch $\Phi^3 = pz^2$

$$9\Phi d\Phi^2 = 4pdz^2$$

$$\frac{9\Phi d\Phi^2}{4p} = dz^2$$

$$dz^2 = \frac{9\Phi d\Phi^2}{4p}$$

$+ d\Phi^2$ $4d\Phi^2 +$

$$d\Phi^2 + dz^2 = d\Phi^2 + \frac{9\Phi d\Phi^2}{4p} :$$

$$= d\Phi^2\left(1 + \frac{9\Phi}{4p}\right) = \sqrt{d\Phi^2 + dz^2} ,$$

$$= d\Phi\sqrt{1 + \frac{9\Phi}{4p}}$$; Diesen Werth des Kurvaelements durch Hilfe der Transformation integriert.

Es

Es sey demnach $\sqrt{1 + \frac{9\Phi}{4p}} = v$

$$1 + \frac{9\Phi}{4p} = v^2$$

$$4p + 9\Phi = 4pv^2$$

$$9d\Phi = 8pvdv$$

$$d\Phi = \frac{8}{9}pvdv$$

mult. durch $\sqrt{\left(1 + \frac{9\Phi}{4p}\right)} = v$

$$d\Phi\sqrt{\left(1 + \frac{9\Phi}{4p}\right)} = \frac{8}{9}pv^2dv$$

$$S\left(d\Phi\sqrt{1 + \frac{9\Phi}{4p}}\right) = \frac{8pv^3}{27}$$

Subſtit. $$= \frac{8p}{27}\sqrt{\left(1 + \frac{9\Phi}{4p}\right)^3}$$

Weil hier beyde Funktionen, Ordinate und Abſciſſe miteinander wachſen und abnehmen, ſo muß, wenn eine $= o$ geeſetzt wird, auch die andere $= o$ ſeyn: folglich der ganze Werth der Gleichung, bis auf die beſtändigen Größen zuſammenfallen. Man kann alſo hier die Konſtante leicht beſtimmen. Denn

$$o = \frac{8p}{27}\sqrt{1 + \frac{o \times \Phi}{4p}} + c$$

$$o = \frac{8p}{27} + c$$

$$-\frac{8p}{27} = c.$$

Es iſt demnach die wahre Rektifikation der Neiliſchen Para-

bel. $\frac{8p}{27}\sqrt{1+\frac{9\Phi}{4p}}-\frac{8p}{27}$ . .

§. 42. Aufgabe. Eine Parabel quadrieren.

Auflösung. Man suche mehrmal in der Parabelgleichung für das allgemeine Flächenelement der krummen Linie $y\,dx$ einen Werth und integriere ihn:

$$y^2 = px$$

$$\sqrt{\quad} \qquad y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$x\,dx \qquad ydx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$Sydx = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{px^3}$$

Der Ausdruck für die durch die Achse halbierte Parabelfläche.

§. 43. Zusatz.

Wollte man lieber die Ordinate als die Abscisse in der Formel haben, so finde man in der Gleichung einen schicklichen Werth zum Substituieren;

$$y^2 = px$$

$$\frac{y^2}{p} = x$$

Kubiert $\frac{y^6}{p^3} = x^3$

$\times p$ $\frac{y^6}{p^2} = px^3$

Also $\tfrac{2}{3}\sqrt{px^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{y^6}{p^2}} = \tfrac{2}{3} \times \frac{y^3}{p}$

Und $q = \frac{2y^3}{3p}$

Es

Es sey z. B. die letzte Ordinate einer Parabelfläche 12 Schuhe und der Parameter derselben 4 Schuhe, so ist $q = \frac{2 \times 12^3}{3 \times 4} = \frac{2 \times 1728}{12} = \frac{1728}{6}$ = 288 Quadratschuhe.

§. 44. Zusatz. Eigentlich ist dieß aber nur die halbe Parabelfläche, wovon nämlich die Achse, ein Parabelast, und nach der Sprache der Alten, eine Semiordinate, Gränzen sind. Um die Ganze zu erhalten, muß demnach, weil die Achse selbe gleich abtheilt, der Ausdruck $\frac{2y^3}{3p}$ duppliert werden;

Folglich $q = \frac{4y^3}{3p}$

§. 45. Zusatz. Soll der Parameter aus der Rechnung wegbleiben, so ist $q = \frac{3}{4} x y$; denn $p = \frac{y^2}{x}$, und dafür in der Quadraturgleichung substituiert.

Giebt $\frac{4y^3}{3 \times y^2} = \frac{4y^3 x}{3y^2} = \frac{4yx}{3} = q$

§. 46. Zusatz. Wird der Parameter = 1 gesetzt so ist $q = \frac{4y^3}{3}$

§. 47. Lehrsatz. Das Flächenstück, welches vom Parameter abgeschnitten wird, ist genau der sechste Theil des Parameterquadrats.

Satz.

$q = \frac{1}{6} p^2$

Beweis.

Es ist hier $2y = p$ . . . . .

Also $8y^3 = p^3$

:2 $4y^3 = \frac{p^3}{2}$

In $q = \frac{4y^3}{3p}$ substituirt.

giebt $q = \frac{p^3}{2} = \frac{p^3}{6p} = \frac{p^2}{6}$

§. 48. **Zusatz.** Es können auch Segmente der Parabelfläche zwischen zwo rechtwinklichten Ordinaten quadriert werden, wenn diese Ordinaten sammt ihrer Entfernung gegeben werden. Denn es sey Fig. 21.

$ac = x$
$ad = m$
$cb = y$
und $df = Z$ so ist §. 17.

$ac : cd = ab^2 : df^2$

oder $x : (x + m) = y^2 : Z^2$

$xZ^2 = y^2x + my^2$

$xZ^2 = y^2x + my^2$

Verf. $xZ^2 - y^2x = my^2$

$:(Z^2 - y^2)$ $x = \frac{my^2}{Z^2 - y^2}$

Also die ganze Abscisse $\frac{my^2}{Z^2 - y^2} + m$

$= \frac{my^2 + mZ^2 - my^2}{Z^2 - y} = \frac{mZ^2}{Z^2 - y^2}$

Diese

Diese Abscisse nun mit vier Drittel von der entsprechenden Ordinate multipliciert, giebt

$$\frac{4Z}{3} \times \frac{m Z^2}{Z^2 - y^2} = \frac{4 m Z^3}{3(Z^2 - y^2)}$$

als den Inhalt der ganzen Parabelfläche.

Man bestimme endlich auch das mangelnde Stück c g a b. Es ist dasselbe

$$\frac{4y}{3} \times \frac{m y^2}{Z^2 - y^2} = \frac{4 m y^3}{3(Z^2 - y^2)}$$

Werden nun beyde Quadraturen voneinander abgezogen, so kömmt natürlich der Flächeninhalt des Parabelsegments zum Vorschein. Daher

$$\frac{4 m Z^3}{3(Z^2 - y^2)} - \frac{4 m y^3}{3(Z^2 - y^2)} = \frac{4 m (Z^3 - y^3}{3(Z^2 - y^2)}$$

§. 49. **Anmerk.** Statt der Entfernung der Ordinaten, oder statt einer dieser Ordinaten, kann auch der Parameter gegeben werden, ohne die Berechnung einer neuen Schwierigkeit zu unterwerfen. Es müssen auch die Ordinaten eben nicht parallel gehen, die das Flächenstück begränzen helfen.

§. 50. **Aufgabe.** Eine Paraboloide, d. i., einen durch Umwälzung einer Parabel um ihre Achse erzeugten Körper, kubieren.

Auflösung. Das Körperelement ist §. 82. $\pi y^2 dx$, wenn y die Semiordinate bezeichnet. Nun

$$y^2 = p x$$

$$X \pi dx \quad \pi y^2 dx = \pi p x dx$$

$$S(\pi y^2 dx) = \frac{\pi p x^2}{2}$$

Also

Also wenn c die Kubatur bedeutet.

$$c = \frac{\pi p x^2}{2}$$

§1. Zusatz. Will man wieder, wie oben bey der Quadratur, statt der Abscisse die Ordinate in die Rechnung bringen, so ist weil $\frac{y^2}{p} = x$

und $\frac{y^4}{p^2} = x^2$ nach geschehener Substitution $c = \frac{\pi p y^4}{2 p^2} = \frac{\pi y^4}{2 p}$

§2. Zusatz. Endlich wenn auch der Parameter aus der Formel wegfallen soll, so werde statt ihm mehrmal das Aequivalent desselben in eine der beyden obigen Kubaturgleichungen gesetzt. Weil nun

$$\frac{y^2}{x} = p$$

so ist z. B. in $c = \frac{\pi y^2}{2 p}$

nachher $c = \frac{\pi y^4}{2} : \frac{y^2}{x}$

$$= \frac{\pi y^4}{2} \times \frac{x}{y^2}$$

$$= \frac{\pi y^4 x}{2 y^2}$$

$$c = \frac{\pi y^2}{2}$$

Oder

Oder in $c = \frac{\pi p x^2}{2}$

nach der Subſtit. $c = \frac{\pi y^2 x^2}{2x} = \frac{\pi y^2}{2}$

Wo demnach überall der nämliche Ausdruck zum Vorſchein kömmt.

§. 53. **Anmerk.** Wenn man die Sache analogiſch mit der Quadratur betrachtet, ſo wird man bald begreifen, daß ſich auch abgeſtutzte Paraboloiden, und mancherley Ausſchnitte aus ſelben berechnen laſſen, welche hier alle anzuführen, der enge Raum dieſes Bändchens verbeut.

§. 54. **Anmerk.** Etwas zur Aufgabe. Es ſoll ein groſſer paraboliſcher Brennſpiegel, deſſen Brennweite $\frac{1}{2}$ Schuh beträgt, und wo der Durchmeſſer von der Oeffnung bis zum Scheitelpunkte 2 Schuh mißt, innenher vergoldet werden. Wie viel wird man Gold dazu nöthig haben, wenn nach Muſchenbröcks Angabe ein Gran hinreicht, 36 $\frac{1}{2}$ Quadratzolle zu überziehen?

Auflöſung. Jener Körper, der genau in dieſen Brennſpiegel hineinpaſſen würde, wäre unfehlbar eine vollkommene Paraboloide. Es iſt demnach einerley, ob die Oberfläche dieſer Paraboloide, oder die hohle Fläche des Brennſpiegels berechnet wird, weil ſie einander bedecken. Man nehme demnach die Gleichung der Parabel her, differenziere ſie, und ſuche alsdann das Aequivalent des Oberflächenelements, deſſen Integral die verlangte Fläche giebt. Nun zur Sache

$$y^2 = px$$

diff. $2ydy = pdx$

quad. $4y^2dy^2 = p^2dx^2$

div. durch $4y^2 = 4px$

$$dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4py} = \frac{pdx^2}{4x}$$

add. $dx^2 \qquad dx^2$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{pdx^2}{4x} + pdx^2 = \frac{pdx^2 + 4xdx^2}{4x}$$

Anders ausgedrückt. $= \frac{dx^2}{4}\left(\frac{p + 4x}{x}\right)$

$\surd \quad \surd\overline{dy^2 + dx^2} = \frac{dx}{2}\,\frac{\surd\overline{p + 4x}}{x}$

$\times 2\pi y \quad 2\pi y\surd\overline{dy^2 + dx^2} = \frac{2\pi y\,dx}{2}\,\surd\frac{\overline{p + 4x}}{x}$

$= \pi y\,dx\,\surd\frac{\overline{p + 4x}}{x}$

Aber $y = \surd px$

Subst. $2\pi y\surd\overline{dy^2 + dx^2} = \pi dx\surd px\surd\frac{\overline{p + 4x}}{x}$

$= \pi dx\surd\frac{\overline{(p + 4)px}}{x}$

$= \pi dx\surd\frac{\overline{p^2x + 4px^2}}{x}$

$2\pi y\surd\overline{dy^2 + dx^2} = \pi dx\surd\overline{p^2 + 4px}$

Weil nun die zwote Seite der Gleichung integriert zu werden verlangt, so kann dieß am füglichsten durch die Transformation geleistet werden.

Es sey daher $\surd\overline{p^2 + 4px} = Z$

quad $p^2 + 4px = Z^2$

diff. $4pdx = 2ZdZ$

$:4p \quad dx = \frac{2ZdZ}{4p} = \frac{ZdZ}{2p}$

Aber

Aber es ist $\sqrt{p^2 + 4px} = Z$, fola. mult.

$$dx\sqrt{p^2 + 4px} = \frac{Z^2\,dZ}{2p}$$

$$\times\pi \qquad \pi\,dx\sqrt{p^2 + 4px} = \frac{\pi Z^2\,dZ}{2p}$$

$$S(\pi dx\sqrt{p^2 + 4px}) = \frac{\pi Z^3}{6p}$$

Statt Z^3 den Werth $\sqrt{(p^2 + 4px)^3}$ substituiert, oder auch, was gleich viel ist, $(p^2 + 4px)\sqrt{p^2 + 4px}$

$$S(\pi\,dx\sqrt{\text{etc.}} = \frac{\pi(p^2 + 4px)\sqrt{p^2 + 4px}}{6p}$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi(p + 4x)\sqrt{p^2 + 4px}$$

Endlich für π, p und x ihre Werthe substituiert, giebt $\frac{1}{6} \times 3,14(2 + 4\times2)\sqrt{2^2 + 4\times2\times2}$

$\frac{1}{6} \times 3,14(2 + 8)\sqrt{4 + 16}$

$\frac{1}{6} \times 3,14 \times 10\sqrt{20}$

$$\frac{31,4 \times 4,47}{6} = \frac{140,358}{6},$$

$= 23',39''$, oder beynahe $23\frac{2}{3}$ Quadratschuhe.

Man hat demnach keinen Gran Gold dazu nöthig; sondern nach folgender Proportion:

$36\frac{2}{3}$ Schuh: 3 Gren $= 23\frac{2}{3}$ Schuh: Z

$3 \times 23\frac{2}{3} = 36\frac{2}{3}$ Z

$70\frac{1}{5} = \frac{110}{3}$ Z

$351 = \frac{550}{3}$ Z

$1053 = 530$ Z

$\frac{1053}{530} = Z$. Also

$Z = 2$ Gren beynahe. 55. An-

§. 55. **Anmerk.** Der Artikel von den Durchmessern der Parabel, und der übrigen Kegelschnitte ist hier geflissentweggelassen worden; theils weil die Beweise der hier einschlägigen Lehrsätze meist sehr gedehnt ausfallen, und es mir noch nicht glückte, sie beträchtlich abkürzen zu können; theils, weil dadurch die Größe dieses Bandes merklich anwachsen würde, wo zudem diese Materie von keiner gar großen Erheblichkeit zu seyn scheint. Zum Ueberflusse wollen wir doch die Erklärung davon geben. Wenn aus was immer für einem Punkte der Krümmung eine Parallellinie mit der Achse fortgezogen wird, so heißt solch eine Linie ein Diameter der Parabel. Bey andern Kurven hat sie den nämlichen Karakter. Diese Benennung kömmt aber daher, weil sie alle Sehnen, die mit der zugehörigen Tangente parallel laufen, durchaus in zween gleiche Theile theilt.

§. 56. **Aufgabe.** Formeln zu finden, wodurch man in Stand gesetzt wird, eine Familie von unendlicherley Parabeln auf einmal zu rektificieren, quadriren, u. d. gl.

Auflösung. Es gehören nach §. 8. zu ein und der nämlichen Parabelfamilie $y^2 = px$, $y^3 = px^2$, $y^4 = px^3$ u. s. f. Eben so gut auch $y^3 = p^2x$, $y^4 = p^3x$ $y^5 = p^4x$ u. s. f.; folglich ist der allgemeine Ausdruck für Parabelgleichungen $y^{m+n} = p^m x^n$. Man differenziere daher diese Gleichung, und verfahre, wie gewöhnlich, so muß sie am Ende ein allgemeines Resultat geben. Erst die allgemeine Rektifikation.

$$y^{m+n} = p^n x^m$$

diff. $(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = np^m x^{n-1} dx$

div. $$dy = \frac{np^m x^{n-1} dx}{(m+n)y^{m+n-1}}$$

quad. $$dy^2 = \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2} dx^2}{(m+n)^2 y^{2m+2n-2}}$$

$$+ dx \qquad = dx^2$$

$$dy^2$$

$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + \frac{n^2 p^2 {}^m x^2 {}^{n-2} dx^2}{(m+n)^2 y^2 {}^{m+2n-2}}$$

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{1 + \frac{n^2 p^2 {}^m x^2 {}^{n-2}}{(m+n)^2 y^2 {}^{m+2n-2}}}$$

Weil aber $p^m x^n = y^{m+n}$
folgl. auch $p^{2m} x^{2n} = y^{2m+2n}$
und div. durch $px = y^2$

$$p^{2m-1} x^{2n-1} = y^{2m+2n-2}$$

so kann in der zwoten Seite der Gleichung substituiert werden, und giebt

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{1 + \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2}}{(m+n)^2 p^{2m-1} x^{2n-1}}}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{n^2 px^{-1}}{(m+n)^2}}$$

Da nun die Wurzel durch eine unendliche Reihe bestimmt werden muß, so wollen wir der Bequemlichkeit halber, statt $\frac{n^2 p}{(m+n)^2} = \mu$ setzen,
so entsteht folgender Kalkul,

$$\sqrt{(\mu x^{-1} + 1)} = (\mu x^{-1} + 1)^{\frac{1}{2}} = \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2} \mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times -\frac{5}{2}}{1 \times 2 \times 3} \mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} \ldots + 1$$
$$= \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}}$$
$$+ \frac{5}{16} \mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} \ldots + 1$$

Endlich alle Glieder durch dx multipliciert:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx -$$
$$- \frac{1}{8}$$

$$- \tfrac{1}{8}\mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}} dx + \tfrac{5}{16}\mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} dx .$$

$$S(\sqrt{dx^2 + dy^2}) = 2\mu^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+ \tfrac{1}{4}\mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}\mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{5}{2}} \ldots x$$

Wird endlich für μ wieder sein Werth in der Berechnung selbst gesetzt, so ist die Formel für jede mögliche Parabel anwendbar.

Bey der allgemeinen Quadratur ist die Arbeit weniger mühsam.

$$y^{m+n} = p^m x^n$$

$$\text{oder } y = \sqrt[m+n]{p^m x^n} = p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$$

$$y\,dx = p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}} dx$$

$$S(ydx) = \frac{p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}+1}}{\frac{m}{m+n}+1} = \frac{p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m+m+n}{m+n}}}{\frac{m+m+n}{m+n}}$$

$$S(ydx) = \frac{(m+n)\, p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{2n+m}{m+n}}}{2n+m}$$

§. 57. Zusatz. Um sich von der Richtigkeit dieser allgemeinen Formel zu überzeugen, wollen wir sie auf die Parabel der ersten Ordnung anwenden. Dort ist $m = 1$ und $n = 1$ folglich fällt der Ausdruck in diesen zusamm $\frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3}$. Wird ferner $x^{\frac{3}{2}}$ in $x \times x^{\frac{1}{2}}$ zerfällt, so giebt es $= \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x}{3}$, und weil $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, substituirt $+ \frac{2}{3} x y$, wie es oben gefunden worden.

§. 58. Zusatz.

§. 58. **Zusatz.** Eine gleiche Bewandniß hat es auch mit der unendlichen Kubatur, und der Oberflächenquadrierung.

§. 59. **Aufgabe.** Eine allgemeine Subtangentenformel für unendlich viele Parabeln ausfindig zu machen.

Auflösung. $y^{m+n} = p^m x^n$

$$(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = n p^m x^{n-1} dx$$

$$\frac{(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy}{n p^m x^{n-1}} = dx$$

$$\text{xy} \qquad \frac{(m+n)\, y^{m+n}\, dy}{n p^m x^{n-1}} = y\, dx$$

$$:dy \qquad \frac{(m+n)\, y^{m+n}}{n p^m x^{n-1}} = \frac{y\, dx}{dy} = \text{Subt.}$$ §33

subst. weil $y^{m+n} = p^m x^n$

$$\frac{(m+n)\, p^m x^n}{n p^m x^{n-1}} = \text{Subt.}$$

abgek. $$\frac{(m+n)\, x}{n} = \text{Subt.}$$

§. 60. **Aufgabe.** Die Subnormal jeder Parabel allgemein zu bestimmen.

Auflösung. $y^{m+n} = p^m x^n$

diff. $(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = n p^m x^{n-1} dx$

mult. durch $y^2 = px$

$(m+n)\, y^{m+n+1}\, dy = n p^{m+1} x^n dx$

div. durch $(m+n)\, y^{m+n} = (m+n)\, p^m x^n$

$$y\, dy = \frac{n\, p\, dx}{m+n}$$

:dn $$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{n\,p}{m+n}$$

also Subnorm. $= \frac{n\,p}{m+n}$

§. 61. **Anmerk.** Auf eine nicht viel unähnliche Art erhält man auch allgemeine Ausdrücke für Tangenten und Normalen unendlicher Parabeln, welche wir Kürze halber hier weglassen wollen. Noch am Ende dieses Kegelschnitts muß angemerkt werden, daß die Theorie desselben vorzüglich gute Dienste in der Artillerie leistet, da, wie aus der Physik bekannt ist, jeder Körper, der nicht perpendikulär geworfen wird, also auch Bomben, eine Parabel beschreiben.

Von der Ellipse.

§. 62. **Erklär.** In jeder Ellipse können zweyerley Achsen gezogen werden: jene welche die Kurva der Länge nach in zween gleiche Theile theilt, heißt die größere Achse, oder schlechtweg die Achse, und wird durch a ausgedrückt. Die andere, welche das nämliche nach der Breite leistet, folglich auch die größere Achse selbst halbiert, wird die kleine Achse, oder Querachse genennt; wir wollen sie künftig c heißen. Die obige Definition des Parameters bleibt auch hier und in der Hyperbel, so wie bey der Parabel.

§. 63. **Lehrsatz.** Ueberall ist in diesem Kegelschnitte das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkte aus dem Parameter in die Segmente der großen Achse, durch eben diese Achse dividiert.

Satz

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$$

Beweis.

Beweis.

Man lege durch jenen Theil des Kegels, aus welchem die Ellipse geschnitten worden, irgendwo eine Zirkelfläche parallel mit der Basis, so wird eine gemeinschaftliche Ordinate des Zirkels und der Ellipse auf einem gemeinschaftlichen Punkt der zwoen Axen perpendikulär stehen. Es ist demnach Fig. 22

$$p\,m^2 = a\,p \times p\,h$$

oder

$$y^2 = a\,p \times p\,h$$

Wenn nun oben und unten an den Scheitelpunkten der Ellipse Linien parallel mit der Basis durch den Kegel gezogen werden, so lassen sich Aequivalente für $a\,p$ und $p\,h$ bestimmen. Denn wegen dem Parallelschnitt $p\,h$ ist nach §. 143 Geom. in dem Dreyecke $b\,c\,k$

$$b\,p : p\,h = b\,c : c\,k$$

oder

$$x : p\,h = a : c\,k$$

$$p\,h = \frac{x \times c\,k}{a}$$

Eben so in dem $\triangle\ c\,d\,b$

$$c\,p : a\,p = c\,b : d\,b$$

oder

$$a-x : a\,p = a : d\,b$$

$$a\,p = \frac{(a-x) \times d\,b}{a}$$

Nun in der erstern Gleichung substituiert, giebt $y^2 = \frac{(a-x) \times d\,b}{a} \times \frac{x \times c\,k}{a}$. Anders geord.

$$y^2 = \frac{d\,b \times c\,k}{a} \times \frac{x\,(a-x)}{a}$$

Weil aber der Quotus $\frac{d\,b \times c\,k}{a}$ aus lauter be-

ständigen Größen zusammgesetzt ist, folglich selbst beständig seyn muß, so ist dieß der Parameter der Ellipse, und kann wieder überhaupt dafür in der Gleichung p substituiert werden.

Also ist $y^2 = \frac{p x (a - x)}{a}$

§. 64. **Zusatz.** Diese Gleichung für die Ellipse $y^2 = \frac{p x (a - x)}{a}$ läßt sich, wenn man wirklich multipliciert, und das erste Glied dividiert, auch so ausdrücken: $y^2 = p x - \frac{p x^2}{a}$. Daher kömmt nun der Name Ellipse, welches Wort, wie wir schon oben erinnerten, einen Mangel bezeichnet; weil nämlich hier die Ordinate dem Produkt aus den Parameter in die Abscisse nicht völlig gleich ist, wie in der Parabel, wo $y^2 = p x$ war, sondern von selbem die Größe $\frac{p x^2}{a}$ abgezogen werden muß.

§. 65. **Anmerk.** Es lassen sich aber eben so gut aus Walzen, als aus Kegeln, Ellipsen ausschneiden. Der Beweis hievon ist eben nicht schwer. Man ziehe Fig. 23 alle hieher gehörigen Linien, wie vorher beym Kegel; so ist erstens

$$p m^2 = f p \times p h$$

oder $y^2 = f p \times p h$. Für $p f$ und $p h$ nun auf gleiche Art ihre Werthe bestimmt.

$$g p : f p = g a : a k$$

weil aber $g p = x$

$g a = a$

und $a k = f h = g d = diam.$

oder schlechtweg $= d.$

subst. $x : f p = a : d$

$f p = \frac{x d}{a}$

Weil

Weil nun das zweyte Segment

$$ph = fh - fp$$ und nach der Subſtit.

$$ph = d - \frac{xd}{a}$$

ſo wird $$ph = \frac{ad - xd}{a}$$

und $$ph = (a-x)\frac{d}{a}$$

Endlich in der Hauptgleichung ſtatt fp und ph ihre eben gefundnen Werthe geſetzt; giebt

$$y^2 = \frac{xd}{a} \times (a-x)\frac{d}{a}.$$

Anders geordnet; $$y^2 = \frac{d^2}{a}x\,\frac{(a-x)}{a}$$

Wird für d^2, als einer beſtändigen Größe, p geſetzt, ſo kömmt die eigenthümliche Gleichung der Ellipſe zum Vorſchein, $y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a}$, welche

um gar nichts von der Kegelellipſe unterſchieden iſt, als um den größern Parameter, vorausgeſetzt daß ihre Achſe gleiche Länge mit jener habe; weil der Walzendurchmeſſer doch größer ſeyn muß, als die Parallelſchnitte des Kegels, welche dort das Dividendum des Parameters geben.

§. 66. Zuſatz. In jeder Ellipſe verhalten ſich demnach die Quadrate der Ordinaten, wie die Produkte aus den entſprechenden Segmenten der Achſe. Es heiße eine Ordinate y, die zugehörigen Segmente x und $a-x$, die andere Ordinate Y, und ihre Segmenten X und $a-X$, ſo gilt die Proportion

$$y^2 : Y^2 = a\,(a-x) : X\,(a-X)$$

Beweis.

Beweis.

In jedem Ellipsenpunkt ist

$$y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a}$$

folglich auch $Y^2 = \frac{pX\,(a-X)}{a}$

$$y^2 : Y^2 = \frac{px(a-x)}{a} : \frac{pX\,(a-X)}{a} \qquad aX$$

$$= px(a-x) : pX\,(a-X)$$

$$y^2 : Y^2 = x\,(a-x) : X\,(a-X) \qquad :p$$

§. 67. Zusatz. Auch in der Ellipse giebt es zu beyden Seiten der Achse Ordinaten; weil hier gleichfalls $y = \pm \sqrt{\frac{px\,(a-x)}{a}}$

§. 68. Zusatz. Die Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende Linie, wie dieß neben der Natur des Kegelschnitts selbst auch aus der Gleichung gezeigt werden kann. Denn setze man erstens

$x = o$, so ist

$$y^2 = \frac{po\,X\,(a-o)}{a}$$

$$y^2 = o$$

$$y = o$$

Also fangen die Ordinaten mit den Abscissen an: setzt man zweytens $x = a$, d. i. wird die Abscisse zur Achse, so erscheint die Gleichung

$$y^2 = \frac{pa\,(a-a)}{a}$$

$$y^2 = pa \times o$$

y^2

$y^2 = o$

$y = o$; und man sieht, daß die Ordinaten wieder aufhören, wenn die Abscisse an Größe der Achse gleicht, oder mit andern Worten, daß die Kurve auf den Endpunkten der Achse aufliege. Da nun dieß auf beyden Seiten der Achse wahr ist, so hat es auch aus der Gleichung seine Richtigkeit, daß die Ellipse in sich zurückkehre.

§. 69. **Zusatz.** Die Ellipse ist von der Parabel blos an der Achsenlänge unterschieden; denn ist diese unendlich, so wird sie zur Parabel. Es ist alsdann $y^2 = \frac{px(\infty - x)}{\infty}$

$$y^2 = \frac{px \infty}{\infty}$$

$: \infty \quad y^2 = px$

§. 70. **Anmerk.** Dieser Satz kömmt der Astronomie bey Berechnung der Kometenperioden sehr gut zu statten, indem die Laufbahnen dieser Gattung von Irrsternen unermeßlich lange Ellipsen sind.

§. 71. **Lehrsatz.** Die größte Ordinate erhält man auf dem Mittelpunkt der Achse, oder wenn die Abscisse der halben Achse gleicht.

Voraussetzung.

$y =$ Maximo.

Satz

$x = \frac{1}{2}a$

Beweis.

Beweis.

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$$

X a	$a\,y^2 = p\,x\,(a-x) = a\,p\,x - p\,x^2$
diff.	$2\,a\,y\,dy = a\,p\,dx - 2\,p\,x\,dx$
: 2 a y	$dy = \frac{a\,p\,dx - 2\,p\,x\,dx}{2\,a\,y}$
: dx	$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,p - 2\,p\,x}{2\,a\,y}$
oder	$o = \frac{a\,p - 2\,p\,x}{2\,a\,y}$
X 2 a y	$o = a\,p - 2\,p\,x$
	$2\,p\,x = a\,p$
: p	$2\,x = a$
: 2	$x = \frac{1}{2}\,a$

§. 72. **Lehrsatz.** Die Querachse ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der großen Achse und des Parameters.

Satz.

$$c = \sqrt{a\,p}$$

Beweis.

In jedem Punkte der Ellipse ist

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$$

aber in diesen Fall $y = \frac{c}{2}$

und $y^2 = \frac{c^2}{4}$

auch ist $x = \frac{a}{2}$

Sub-

Subſtit. $\frac{c^2}{4} = \frac{p\,\frac{a}{2}\,(a - \frac{a}{2})}{a}$

$\frac{c^2}{4} = p \times \frac{\frac{a}{2}}{2}$

abgek. $\frac{c^2}{4} = \frac{ap}{4}$

$c^2 = ap$

$c = \sqrt{ap}$

§. 73. **Zuſatz.** Man findet aus dieſem Ausdrucke auch Aequivalente für a und p; denn es iſt $a = \frac{c^2}{p}$ und $p = \frac{c^2}{a}$, welche wir vielleicht bald zu Subſtitutionen gebrauchen können.

§. 74. **Zuſatz.** Der Parameter iſt demnach die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Achſe; denn

$c = \sqrt{ap}$

$c^2 = ap$ und in eine Proportion zerſtreut, $a : c = c : p$

§. 75. **Aufgabe.** Den Parameter in der Ellipſe durch Zeichnung ſichtbar zu machen.

Auflöſung. Man halbiere die größere Achſe, beſchreibe auf den Mittelpunkt derſelben die gröſte Ordinate, d. i. die halbe kleinere Achſe, verbinde die beyden Endpunkte mit einer Sehne, und errichte von der kleinern aus, auf den Endpunkt dieſer Sehne einen Perpendikel, ſo wird das Stück der großen Achſe zwiſchen dieſem Perpendikel und der kleinen Achſe den halben Parameter vorſtellen, welcher ſich leicht durch Hilfe eines Zirkelinſtruments nochmal

auf

auf der großen Achse umschlagen läßt, um den ganzen Parameter zu Gesicht zu bekommen.

Satz Fig. 24

2 d g, oder d h = p

Beweis.

Weil das Dreyeck a b g aus der Bedingung der Konstruktion rechtwinklicht ist, so läßt sich ein halber Zirkel darüber werfen, wovon a g den Diameter giebt. Nun ist wegen dem Perpendikel b d

$$ad : bd = bd : dg$$

subst. $\frac{a}{2} : \frac{c}{2} = \frac{c}{2} : dg$

X 2 $a : c = c : 2\,dg$

$c^2 = a \times 2\,dg$

aber $c^2 = ap$ §. 72

$a \times 2\,dg = ap$

$2\,dg = p$

oder $dh = p$

§. 76. **Anmerk.** Man vergleiche diese meine Bezeichnung des Parameters mit Hildebrands seiner, und urtheile dann, welche natürlicher, einfacher und kürzer ist.

§. 77. **Aufgabe. Die Brennpunkte in der Ellipse durch Zeichnung zu bestimmen.**

Auflösung. Man beschreibe zuerst auf obige Weise den halben Parameter, trage ihn rechtwinklicht auf beyde Endpunkte der großen Achse, und lege eine Linie darüber, die wegen ihrer gleichen Entfernung von der Achse mit ihr nothwendig parallel laufen muß. Wo nun diese Parallellinie die

Kurve

Kurve schneidet, da fälle man Perpendikel oder Ordinaten auf die große Achse hin, so werden dieselben auf den Brennpunkten stehen.

Beweis. Fig. 25.

Aus der Definition des Brennpunkts ist derselbe in jedem der drey Kegelschnitte da, wo die Ordinate zum halben Parameter wird. Weil nun wegen Parallelismus $ab = cf$ und $gh = dF$, so haben diese Ordinaten den halben Parameter zum Maase; folglich müssen sie auf den Brennpunkten f und F stehen.

§. 78. **Lehrsatz.** Wenn statt der großen Achse die kleine in die Rechnung gebracht wird, so heißt die Gleichung für die Ellipse

$$y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

Beweis.

$$y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a}$$

$$ay^2 = px\,(a-x) = apx - px^2$$

$$-apx = \qquad\qquad -apx$$

$$ay^2 - apx = -px^2$$

durch $y^2 - px = y^2 - px$ div.

$$a = \frac{-px^2}{y^2-px} = \frac{px^2}{px-y^2}$$

aber $a = \frac{c^2}{p}$ §. 73.

$$\frac{c^2}{p} = \frac{px^2}{px-y^2}$$

px

$$\times p \qquad c^2 = \frac{p^2 x^2}{px - y^2}$$

$$\times (px - y^2) \qquad c^2 px - c^2 y^2 = p^2 x^2$$

$$-c^2 y^2 = p^2 x^2 - c^2 px$$

$$(:-c)^2 \qquad y^2 = \frac{p^2 x^2 - c^2 px}{-c^2}$$

$$\text{oder} \qquad y^2 = \frac{c^2 px - p^2 x^2}{c^2}$$

$$y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

§. 79. **Lehrsatz.** Die Gleichung für die Ellipse heißt ohne Beyziehung des Parameters

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

Beweis.

Es ist $p = \frac{c^2}{a}$

und $p^2 = \frac{c^4}{a^2}$. Diese Werthe in der Gleichung $y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{c^2}$ substituiert, giebt

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^4 x^2}{c^2 a^2} = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

§. 80. **Lehrsatz.** Wenn die Abscissen vom Mittelpunkte angerechnet, und v genennt werden, so ist die Gleichung mit Beyziehung der großen Achse und des Parameters

$$y^2 = \tfrac{1}{4} ap - \frac{pv^2}{a} = p\left(\tfrac{1}{4} a - \frac{v^2}{a}\right)$$

Beweis.

Beweis. Fig. 29.

$$pd = ad - ap$$

oder $v = \frac{a}{2} - x$

und daher $x = \frac{a}{2} - v$. Dieß nun in der ersten Gleichung $y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$ für x substituiert,

so kömmt zum Vorschein

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a}{2}-v\right)\left(a-\frac{a}{2}+v\right)}{a}$$

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a}{2}-v\right)\left(\frac{a}{2}+v\right)}{a}$$

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a^2}{4}-v^2\right)}{a} \text{ oder } = \frac{pa^2}{4a} - \frac{pv^2}{a}$$

$$y^2 = p\left(\tfrac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

§. 81. **Zusatz.** Bringt man statt p oder a mehrmal ihre Aequivalente in die Rechnung, so erhält man im ersten Falle

$$y^2 = \frac{c^2}{a}\left(\tfrac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

$$y^2 = \frac{c^2 a}{4a} - \frac{c^2 v^2}{a^2}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$$

Im zweyten Falle $y^2 = p\left(\frac{c^2}{4p} - \frac{v^2}{c^2 : p}\right)$

$$y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{p^2 v^2}{c^2}$$

§. 82. **Anmerk.** Um die bisher gefundenen 6 Ellipsengleichungen mit einemmal überblicken zu können, wollen wir sie der Ordnung nach, wie sie erhalten worden sind, hieher setzen.

1) $y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$

2) $y^2 = p\,x - \frac{p^2\,x^2}{c^2}$

3) $y^2 = \frac{c^2\,x}{a} - \frac{c^2\,x^2}{a^2}$

4) $y^2 = \frac{1}{4}\,a\,p - \frac{p\,v^2}{a}$

5) $y^2 = \frac{1}{4}\,c^2 - \frac{c^2\,v^2}{a^2}$

6) $y^2 = \frac{1}{4}\,c^2 - \frac{p^2\,v^2}{c^2}$

§. 83. **Lehrsatz.** Alle diese 6 Ellipsengleichungen lassen sich in Zirkelgleichungen umschaffen, wenn man entweders $p = a$ oder $c = a$, oder endlich $p = c = a$ setzt.

Beweis.

Denn es heißt die ursprüngliche erste Aequation vor der Substitution $y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$; darnach aber

$$y^2 = \frac{a\,x\,(a-x)}{a} = x\,(a-x) = a\,x - x^2,$$

Die zwote $y^2 = p\,x - \frac{p^2\,x}{c^2}$ geht in diese über; $y^2 = a\,x - \frac{a^2\,x}{a^2} = a - x^2$

Die

Die dritte $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ nimmt folgende Gestalt an: $y^2 = \frac{a^2 x}{a} - \frac{a^2 x^2}{a^2}$

und abgek. $y^2 = ax - x^2$

Die vierte $y^2 = p\,(\frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}$ giebt

$$y^2 = a\left(\tfrac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a v^2}{a}$$

$y^2 = \frac{1}{4}a^2 - v^2$ Eine Zirkelgleichung, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet werden, und a die ganze Achse bedeutet. Denn soll der Radius oder $\frac{a}{2} = 1$ gelten, folglich $a = 2$, und wenn x gerade das, was v bedeutet, ausdrückt, so kömmt die obige Gleichung §. 73, diff. $y^2 = 1 - x^2$ zum Vorschein.

Eben so verhält sichs bey der sechsten Gleichung $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$, woraus mehrmal die nämliche Aequation $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 v^2}{a^2}$

oder abgek. $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - v^2$ d. i. $= 1 - x^2$ entspringt.

§. 84. **Zusatz.** Daraus erhellet, daß der Zirkel eigentlich nichts anders sey, als eine Gattung von Ellipsen, wo der Parameter, kleine und große Achse einander vollkommen gleich sind.

§. 85. **Anmerk.** Ueberhaupt darf in jeder Ellipsengleichung nur statt a, c und p eine geometrische Mittelgröße zwoer dieser Linien, zum Beyspiel $\sqrt{ac}$, $\sqrt{ap}$ oder $\sqrt{cp}$

$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}$ u. s. f. substituiert und diese beständige Größe am Ende mit Einem Buchstaben, als etwa mit a bezeichnet werden, so entsteht allemal eine Zirkelgleichung. Nehmen wir unter andern die erste ursprüngliche $y^2 = \frac{p x (a-x)}{a}$ her, so giebt dieß nach der Substitution

$$y^2 = \frac{a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} x \left(a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} - x\right)}{a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}$$

$$y^2 = x \left(a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} - x\right)$$

oder $$y^2 = x (a - x)$$

$$y^2 = a x - x^2$$

Es wird sogar auch weiter unten erwiesen werden, daß der Flächeninhalt jeder Ellipse der Fläche eines Zirkels gleiche, der zur Achse die mittlere Proportionallinie zwischen beyden Ellipsenachsen oder andern zwo berührten Linieu hat.

§. 86. **Lehrsatz.** Auch können die Ordinaten um noch mehrere Gleichungen zu gewinnen, auf der kleinen Achse genommen werden. Es tritt hier, wenn z die Abscisse vom Mittelpunkte und Φ die Ordinate bedeutet, die Gleichung ein

$$\Phi^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2},$$

Beweis. Fig. 26.

Es ist hier d b $= \Phi$

und b c $= z$ vom Mittelpunkte.

Da nun erwiesen worden, daß sonst

$$y^2 = \tfrac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} \text{ war,}$$

aber

aber in unserm Fall nach gezogener Parallelinie d g

$$y = dg = bc = z$$

und $v = gc = db = \Phi$ ist;

so läßt sich substituieren. Folglich

$$z^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 \Phi^2}{a^2}$$

$\times a^2$ $\quad a^2 z^2 = \frac{1}{4} c^2 a^2 - c^2 \Phi^2$

$c^2 \Phi^2 = \frac{1}{4} c^2 a^2 - a^2 z^2$

$:c^2$ $\quad \Phi^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$

§. 87. **Zusatz.** Es leuchtet von selbst ein, daß man auch auf diesem Wege wieder sechserley Gleichungen erobern könnte. Die Verfahrungsart ist die nämliche, wie oben, und die Gleichungen fallen sehr ähnlich mit den erstern aus.

§. 88. **Anmerk.** Ein Liebhaber von der Methode, alle Sätze in Proportionen einzukleiden, findet in den obigen 6 Gleichungen, so wie in diesen, ein weites fruchtbares Feld. So z. B. fließt aus der dritten Gleichung die bekannte Proportion: Das Quadrat der halben kleinen Achse verhält sich zum Quadrat der halben größern Achse; wie das Quadrat jeder Ordinate zum Produkte aus den Segmenten der großen Achse. Denn

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$\times a^2$ $\quad a^2 y^2 = c^2 a x - c^2 x^2$

$:c^2$ $\quad \frac{a^2 y^2}{c^2} = a x - x^2 = x(a-x)$

aufgelöset $\quad c^2 : a^2 = y^2 : x(a-x$

$:4$ $\quad \frac{c^2}{4} : \frac{a^2}{4} = y^2 : x(a-x)$

§. 89. **Lehrsatz.** Die Entfernung des Brennpunkts in der Ellipse vom Scheitel ist gleich der

halben großen Achse mehr oder weniger der halben Quadratwurzel aus dem Produkte dieser Achse in die Differenz zwischen der nämlichen Achse und dem Parameter.

Satz.

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a\,(a-p)}$$

Beweis.

Es ist überall $y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$

Allein hier $y = \tfrac{1}{2}p$

also $y^2 = \tfrac{1}{4}p^2$

Folgl. $\tfrac{1}{4}p^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$

$:p \quad \tfrac{1}{4}p = \frac{x\,(a-x)}{a}$

$\times a \quad \frac{a\,p}{4} = a\,x - x^2$

$x^2 - a\,x = -\frac{a\,p}{4}$

kompl. $+\tfrac{1}{4}a^2 \quad +\frac{a^2}{4}$

$x^2 - a\,x + \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a\,p}{4} = \frac{a\,(a-p)}{4}$

$\surd \quad x - \tfrac{1}{2}a = \pm\frac{\sqrt{a\,(a-p}}{2}$

$+\tfrac{1}{2}a \quad +\tfrac{1}{2}a$

$x = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a\,(a-p)}$

§. 90. **Zusatz.** In jeder Ellipse finden sich daher zween Brennpunkte vor, deren einer $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$ und der andere $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$

§. 91. **Erkl.** Die Entfernung der zween Brennpunkte selbst von einander heißt die Exzentrizität der Ellipse. Sie wird von der kleinen Achse ebenfalls in zween gleiche Theile getheilt; weil sie die große Achse ist, weniger der beyderseitigen Fokallänge.

§. 92. **Zusatz.** Wenn die halbe Exzentrizität von der ersten halben großen Achse abgezogen wird, so überkömmt man auch den ersten Brennpunkt: wird selbe hingegen zu der ersten halben Achse addiert, so wird der zweyte gefunden. Dieß geschieht aber in dem Ausdrucke $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a(a-p)}$. Folglich ist $\sqrt{a(a-p)}$ die ganze Exzentrizität der Ellipse.

§. 93. **Zusatz.** Diese Exzentrizität läßt sich aus jeder Gleichung unmittelbar finden, in welcher die Abscissen vom Mittelpunkte genommen sind; weil sie zur Parameterordinate als Abscisse gehört. Denn es sey

$$y^2 = \tfrac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$$

Weil nun $y = \frac{1}{2}p$

und $y^2 = \frac{1}{4}p^2$

Folglich $\frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$

$:p \quad \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}$

vers. $\frac{v^2}{a} = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}(a-p)$

$\times a \quad v^2 = \frac{1}{4}(a^2 - ap) = \frac{1}{4}a(a-p)$

$\surd \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$

§. 94. **Zusatz.** Wünschte man lieber, die halbe oder ganze Exzentrizität in Achsenwerthen zu haben, so darf nur statt p dessen Aequivalent $\frac{c^2}{a}$ substituiert werden. Es ist daher nach der

Substitution $v = \frac{1}{2}\sqrt{a\left(a - \frac{c^2}{a}\right)}$ und

$v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$, und die ganze Exzentrizität $= \sqrt{a^2 - c^2}$. Ein Ausdruck, der noch simpler als der obige ausfällt, und sich deutlicher durch Worte vortragen läßt. Es ist nämlich die ganze Exzentrizität die Wurzel aus der Differenz der beyden Achsenquadraten.

§. 95. **Zusatz.** Der nämliche Ausdruck entwickelt sich auch unmittelbar sogleich aus der 5ten Ellipsengleichung, wenn statt y der halbe Parameter und statt diesen endlich das halbe Aequivalent aus den Achsen $\frac{c^2}{2a}$ zu stehen kömmt.

Es ist diesemnach $\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}}$

oder $\frac{\frac{c^2}{2a}}{} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}}$

quad. $\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$: c^2$ $\frac{c^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{v^2}{a^2}$

$\times a^2$ $\frac{\frac{c^2}{4}}{} = \frac{1}{4}a^2 - v^2$

vers. $v^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$

$\sqrt{}$ $v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$

§. 96.

§. 96. **Lehrsatz.** Das Produkt der Brennweite in den übrigen Theil der großen Achse ist gleich dem vierten Theil der quadrierten kleinen Achse: oder, die halbe Querachse ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Fokallänge und dem übrigen Reste der Hauptachse.

Satz

$x(a-x) = \frac{1}{4}c^2$ oder $x : \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c : (a-x)$ } wo x die Brennweite bedeutet.

Beweis.

$$x = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$$
$$a - x = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$$ §. 94.

mult. $x(a-x) = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2} + \frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2} - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$

abgek. $x(a-x) = \frac{1}{4}c^2$

oder $x : \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c : (a-x)$

§. 97. **Zusatz.** Der Lehrsatz könnte auch so eingekleidet werden: Wenn über die Hauptachse einer Ellipse ein halber Zirkel beschrieben wird, so muß die Zirkelordinate auf dem Brennpunkte der halben Querachse der Ellipse gleich seyn.

§. 98. **Zusatz.** Wenn also neben der großen Achse auch die Brennweite gegeben wird, so läßt sich die kleine Achse leicht bestimmen. Es darf nur über die Hauptachse ein Zirkel geschwungen, und auf dem Brennpunkt ein Perpendikel bis an die Peripherie errichtet werden, so muß dieß die halbe Querachse seyn.

§. 99.

§. 99. **Zusatz.** Endlich könnte man auch den Werth der Exzentrizität in Ausdrücken der kleinen Achse und des Parameters bestimmen: Da aber die Verfahrungsart beynahe immer die nämliche bleibt, so wollen wir das dem forschenden Fleiße der Anfänger überlassen. Es ist indessen hier $v = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{c^2 - 1}{p}}$

§. 100. **Lehrsatz.** Bildet man sich auf der kleinen Achse die Brennpunkte ein, so ist die halbe Excentricität daselbst, die kleine Achse multipliciert mit der Wurzel aus dem Produkte der Summe und Differenz der quadrierten beyden Achsen, alles durch die doppelte quadrierte große Achse dividiert.

Satz.

$$z = c \sqrt{\frac{(a^2 + c^2)(a^2 - c^2)}{2\,a^2}} \quad \text{oder}$$

$$z = \frac{c}{2\,a^2} \sqrt{a^4 - c^4}$$

Beweis.

Es ist hier $\Phi^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$

aber $\Phi = \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2\,a}$

quad. $\Phi^2 = \frac{c^4}{4\,a^2}$

Folgl. $\frac{c^4}{4\,a^2} = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$

$\times c^2$

$$\times c^2 \qquad \frac{c^6}{4a^2} = \tfrac{1}{4}a^2c^2 - a^2z^2$$

$$:a^2 \qquad \frac{c^6}{4a^4} = \tfrac{1}{4}c^2 - z^2$$

$$\text{vers. } z^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^6}{4a^4} = \frac{c^2a^4 - c^6}{4a^4} = \frac{c^2(a^4 - c^4)}{4a^4}$$

$$\surd \quad z = \frac{c\sqrt{a^4 - c^4}}{2a^2} = \frac{c}{2a^2}\sqrt{a^4 - c^4}$$

§. 101. **Zusatz.** Wenn die zwey Achsen einander gleich gesetzt werden, so verschwinden die Exzentrizitäten auf beyden Achsen; weil $a^2 - c^2$ oder $a^4 - c^4 = 0$ werden. Es läßt sich also wieder behaupten, daß der Zirkel eine Ellipse ohne Exzentrizität sey.

§. 102. **Erkl.** Verbindet man die vier Brennpunkte der Ellipse durch gerade Linien, so entsteht ein eingeschloßner Raum, welcher das Parallelogram der Exzentrizität heißen kann, und wodurch sich die Ellipse an Quadratinhalt von dem Zirkel unterscheidet; weil dieser Raum nothwendig verschwinden muß, wenn die beyden Achsen gleiche Größen bekommen.

§. 103. **Lehrsatz.** Das Parallelogram der Exzentrizität läßt sich bestimmen: es ist, wenn der Quadratinhalt durch q bezeichnet wird, der

Satz. Fig. 27

$$q = \left(\tfrac{1}{2}c - \frac{c^3}{2a^2}\right)\sqrt{a^2 + c^2}$$

Beweis.

Beweis.

$$\text{Das } \Delta\ fgF = \frac{fF}{2} \times gc;$$

$$\text{aber } \frac{fF}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{als halbe Exzent.}$$

$$\text{und } gc = \frac{c\sqrt{(a^2+c^2)\ (a^2-c^2}}{2\,a^2}$$

$$\text{mult. } \frac{fF}{2} \times gc = \Delta fgF = \frac{c\sqrt{(a^2+c^2)}\sqrt{(a^2-c^2)}}{4\,a^2}$$

$$\sqrt{(a^2-c^2)}$$

$$\Delta fgF = \frac{c\ (a^2-c^2)\sqrt{(a^2+c^2)}}{4\,a^2}$$

$$\Delta fgF = \frac{a^2\,c - c^3}{4\,a^2}\sqrt{a^2+c^2)}$$

$$\times 2 \quad 2\,\Delta fgF = q = \frac{a^2\,c - c^3}{2\,a^2}\sqrt{(a^2+c^2)}$$

$$\text{abgek. } q = \left(\tfrac{1}{2}c - \frac{c^3}{2\,a^2}\right)\sqrt{(a^2+c^2)}$$

§. 104. **Lehrsatz.** Der Brennstrahl, von der großen Achse aus, an den Endpunkt der kleinen Achse hingezogen, ist allemal gleich der halben großen Achse.

Satz. Fig. 28.

$$fc = \tfrac{1}{2}a$$

Beweis.

$$fc^2 = cb^2 + fb^2$$

Weil aber cb nichts anders als die halbe kleine Achse, und fb die halbe Exzentrizität ist, so kann substituiert werden;

$$fc^2$$

$$f c^2 = \tfrac{1}{4} c^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}\right)^2$$

$$f c^2 = \tfrac{1}{4} c^2 + \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} c^2$$

abgek. $f c^2 = \tfrac{1}{4} a^2$

$f c = \tfrac{1}{2} a$

§. 105. Zusatz. Daraus folgt eine sehr leichte Art, aus den beyden Achsen die Brennweiten zu bestimmen. Man darf nur durch Hilfe des Handzirkels mit der Oefnung der halben großen Achse aus dem einen Endpunkte der kleinen die große Achse beyderseits durchschneiden, so sind die Brennpunkte sichtbar gemacht.

§. 106. **Anmerk.** Herr Prof. Tanzer macht in seinem Lehrbuche IIter Theil §. 118 aus diesem Lehrsatze eine Erklärung des Brennpunkts, ohne ihn selbst vorauszuschicken. Allein es ist durchaus bekannt, daß in den dreyen Kegelschnitten da überall der Brennpunkt sey, wo der halbe Parameter die Ordinate abgiebt; folglich erwartet hier der Anfänger sehr billig eine Rechtfertigung dieser zweyten Definition; um zu zeigen, daß selbe in Rücksicht der ersten keinen Widerspruch in sich fasse.

§. 107. **Lehrsatz.** Was immer für zween entgegengesetzte Brennstrahlen, die an der Kurve einen Winkel bilden, sind zusammgenommen der großen Achse gleich.

Satz. Fig. 29.

$$f m + F m = a$$

Beweis.

I $f m^2 = f p^2 + m p^2$

Da nun $f p = f d - p d$

oder $= \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} - v$

und $f p^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} c^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2$

Fer-

Ferner $mp^2 = y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$ Folgl.

subſtit. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

abgek. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$\sqrt{}$ $fm = \frac{1}{2}a - \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

II $Fm^2 = pF^2 + mp^2$

Da hier $pF = dF + pd$

oder $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} + v$

ſo iſt auch $pF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2$

Subſtit. $Fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

abgek. $Fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$\sqrt{}$ $Fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

oben war $fm = \frac{1}{2}a - \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

---

add. $fm + Fm = a$

§. 108. **Anmerk.** Wie ſich bey den beyden Wurzelausziehungen am Ende allemal das $v^2 - \frac{c^2 v^2}{a}$ aufhub, wird der Anfänger daraus leicht begreifen: weil auch das Quadrat des zweyten Theils abgezogen werden muß. Nun iſt der zweyte Theil hier unfehlbar $\frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$; folglich

macht

macht dessen Quadrat $\frac{v^2}{a^2}(a^2 - c^2) = \frac{v^2 a^2}{a^2} - \frac{v^2 c^2}{a^2}$ $= v^2 - \frac{v^2 c^2}{a^2}$. Werden nun die Zeichen verändert und addiert, so hebt sich alles auf. Da bey der Hyperbel eine ähnliche Rechnung vorkömmt, so soll diese Anmerkung auch dorthin gelten.

§. 109. **Aufgabe.** Eine Ellipse nach geometrischen Gründen zu zeichnen.

Auflösung. Man ziehe die große Achse, bestimme nach Willkühr die Brennpunkte darauf, doch so, daß die Fokallängen beyderseits gleich bleiben, und zerstücke diese Achse in was immer für zween Theile. Zum Beyspiel Fig. 30 in a c und c b, so wird, wenn man mit der Zirkelöfnung jeder dieser Segmentenweiten aus den Brennpunkten Bögen durchschnitte macht, wie hier in h, der Durchschnittspunkt in der Ellipsenlinie liegen. Geschieht die Zerstückung in a d und d b, so trift der Durchschnittspunkt in k u. s. w. Je mehr nun dergleichen Punkte mittels verschiedner Zerstückung der Achse genommen werden, desto genauer läßt sich auch die Ellipse durch diese Punkte ziehen.

Beweis. Die Brennstrahlen h f und h F, so auch k f und k F, sind der Konstruktion gemäß der großen Achse gleich. Diese Eigenschaft kömmt aber ausschlüßungsweise der Ellipse zu. Folglich ist jede Linie auf solche Art beschrieben, eine Ellipse.

§. 111. **Anmerk.** Die gewöhnliche mechanische Art, eine Ellipse zu zeichnen, geschieht durch Hilfe zweener Stifte, die in die Brennpunkte eingeschlagen werden, und einer Schnur, deren beyde Ende man an diese Stifte anknüpft. Es muß aber die Schnur etwas länger seyn als die Exzentrizität, je nachdem nämlich die Gestalt der Ellipse ausfallen soll, weil

im widrigen Falle durch die Anstrengung der Schnur keine Brennstrahlen entstehen würden, welche, wenn sie herumgeführt werden, die Ellipse geben. Der Beweis, daß diese beyden Brennstrahlen der grossen Achse gleich sind, ist leicht: denn man darf nur bedenken, daß die Länge der Achse aus der doppelten Fokallänge und der ganzen Excentricität besteht; nun aber, wenn die Schnur in eine solche Lage gebracht wird, daß die Brennstrahlen keinen Winkel mehr machen, so wird das doppelte Maas der Brennweite und die ganze Exzentrizität an der Schnur sichtbar werden, folglich ist die Sache richtig.

§. 112. **Aufgabe. Auf jeden Punkt der Ellipse eine Tangente hinzuziehen.**

Auflösung. Man ziehe auf dem gegebnen Punkt die beyden entsprechenden Brennstrahlen zu-
32 sammen, z. B. Fig. wenn x der gegebne Punkt ist, f m und F m; verlängere einen derselben von aussen um die Größe des andern in gerader Richtung, (am bequemsten ist es, man setzet den kleinern Brennstrahl an den größern) wie hier d m = m f wird, und theile den durch die Verlängerung entstandnen Aussenwinkel in zween gleiche Theile, so ist diese Theilungslinie die Tangente des gegebnen Punktes.

Beweis. Richtig ist es, daß der gegebne Punkt der Ellipse in der Theilungslinie liege; weil sie durch den Winkelpunkt o der mit x einen gemeinschaftlichen Scheitel hat, der Bedingung gemäß gezogen worden. Es kömmt also hier blos darauf an, daß man untersuche ob diese Linie a b die Ellipse nicht allenfalls geschnitten habe, das heißt mit andern Worten, ob nicht noch ein Punkt derselben entweder früher oder später in der Ellipse liege. Allein, keiner dieser zween Fälle ist möglich: denn geschähe es später z. B. in b, so wäre eben dieses b ein Punkt der Ellipse, und dann müsten

$f b + F b = a$, d. i. = der großen Achse seyn,
aber $d b + b F < d F$ als Seiten eines △es
und da $d b = f b$ ist, weil doch das △ $d f b$ immer gleichschenklicht bleiben muß, so kann substituiert werden

$$f b + b F < d F$$

Nun ist $d F = a$, aus der Konstrukt.
Also auch $f b + b F < a$

Das nämliche ergiebt sich auch, wenn ein früherer Punkt c angeben wird; denn auch dießmal ist

$$c d + c F < d F \text{ oder } < a$$

§. 113. **Lehrsatz.** Die Winkel welche die Brennstrahlen mit der Tangente machen, sind überall einander gleich.

Satz. Fig. 32.

$$o = m$$

Beweis.

$s = o$ wegen der Theilung.
$s = m$ als Vertik.

also $o = m$

§. 114. **Anmerk.** Wenn hier wieder der Lehnsatz aus der Physik von der Gleichheit des Ein- und Ausfallwinkels abprellender Lichtstrahlen, wie oben §. 29 bey hohlen Paraboloiden, angewandt wird, so ist klar, daß in elliptischen Brennspiegeln Glut oder Flamme aus einem Fokus, brennbare Materie z. B. Schießpulver, Zunderschwamm, Holz u. d. gl. in dem andern Fokus anzünden müsse; weil alle Feuerstrahlen so gebrochen werden, daß sie sämmtlich in den andern Brennpunkt eintreffen. Eben so einleuchtend ist es, daß, wenn in elliptisch gebauten Gewölbern jemand in einem der Brennpunkte spricht, von niemand in der ganzen Halle könne gehört werden, als gerade von dem, der das Ohr im andern Brennpunkte hat. Weitere Anwendungen dieses Satzes, und zwar mit erheblichem Vortheile, lassen sich bey Sprachröhren, Beleuchtungen kleiner finsterer Gegenstände u. d. gl. anbringen.

§. 115.

Lehrsatz. Die Tangente ist in der Ellipse

$$= \frac{\sqrt{(ax - x^2)\,(a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2))}}{a\,(a - 2x)}$$

Beweis.

Man suche mehrmal für die Formel jeder Kurvatangente $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$ in der differenzierten Gleichung ihr Aequivalent, so wird sich der Satz bestättigen.

Es ist unter andern auch $y^2 = \frac{c^2x}{a} = \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$

diff. $2ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{a^2}$

quad. $4y^2dy^2 = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2}{a^4}$

$$dy^2 = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2}{4a^4y^2}$$

$+dx^2 \quad +dx^2$

dy^2

$$dy^2 + dx^2 = \frac{a^2 c^4 dx^2 - 4 a c^4 x dx^2 + 4 c^4 x^2 dx^2}{4 a^4 y^2} + dx^2$$

$$= \frac{a^2 c^4 dx^2 - 4 a c^4 x dx^2 + 4 c^4 x^2 dx^2 + 4 a^4 y^2 dx^2}{4 a^4 y^2}$$

$$\times y^2 \qquad y^2 (dy^2 + dx^2) = \frac{a^2 c^4 dx^2 - 4 a c^4 x dx^2 + 4 c^4 x^2 dx^2 + 4 a^4 y^2 dx^2}{4 a^4}$$

Für y^2 in der zwoten Seite der Gleichung substituiert

$$y^2 (dy^2 + dx^2) = a^2 c^4 dx^2 - 4 a c^4 x dx^2 + 4 c^4 x^2 dx^2 + 4 a^4 \left(\frac{a c^2 x - c^2 x^2}{a^2}\right) dx^2$$

$$\text{oder} \qquad = \frac{c^2 dx^2}{4 a^4} (a^2 c^2 - 4 a c^2 x + 4 c^2 x^2 + 4 a^2 (a x - x^2)$$

$$\surd \qquad y \surd (dy^2 + dx^2) = \frac{c\, dx}{2 a^2} \surd (a^2 c^2 - 4 a c^2 x + 4 c^2 x^2 + 4 a^2 (a x - x^2))$$

Um : dy $\qquad \frac{y \surd (dy^2 + dx^2)}{dy}$, oder Tang. $= \frac{c}{2 a^2} \times \frac{dx}{dy} \surd (a^2 c^2 - 4 a c^2 x + 4 c^2 x^2 + 4 a^2 (ax - x^2))$

109

Den Ausdruck $\frac{dx}{dy}$ nochmal aus der differenzierten Gleichung in endlichen Größen bestimmt:

$$2ydy = \frac{ac^2\,dx - 2c^2x\,dx}{a^2}$$

$\times a^2$ $\quad 2a^2ydy = ac^2\,dx - 2c^2x\,dx$

$:(ac^2 - 2c^2x)$ $\quad \frac{2a^2ydy}{ac^2 - 2c^2x} = dx$

$:dy$ $\quad \frac{2a^2y}{ac^2 - 2c^2x} = \frac{dx}{dy}$ Weil aber $y = \sqrt{\frac{acx - c^2x^2}{a^2}}$, so ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2a^2\sqrt{(ac^2x - c^2x^2):a^2}}{ac^2 - 2c^2x} = \frac{2a^2\sqrt{c^2(ax - x^2)}}{c^2(a - 2x} = \frac{2ac\sqrt{ax - x^2}}{c^2(a - 2x} = \frac{2a\sqrt{ax - x^2}}{c(a - 2x)}$$

In der obigen Gleichung substituiert, giebt

$$\text{Tang} = \frac{c}{2a^2} \times \frac{2a\sqrt{ax - x^2}}{c(a - 2x)} \times \sqrt{a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2)}$$

$$\text{abgek.} = \frac{\sqrt{(ax - x^2)\,(a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2))}}{a(a - 2x)}$$

§. 116.

§. 116. **Anmerk.** Um sich zu überzeugen, daß dieser Ausdruck wirklich der Tangente gleich sey, darf nur $a = c$ gesetzt werden, und sie muß am Ende auf die Tangente des Zirkels zusamm fallen. Noch kürzer wird die Prüfung seyn, wenn sowohl für a als für $c = 1$ angenommen wird. Man bekömmt in diesem Falle

$$\frac{\sqrt{(x - x^2) \times 1 - 4x + 4x^2 + 4x - 4x^2}}{1 - 2x} = \frac{\sqrt{x - x^2}}{1 - 2x}$$

und dieß ist auch wirklich die Tangente des Zirkels. Denn weil die Subtangente nach §. 37, wenn $a = 1$ gesetzt wird, den Ausdruck bekömmt $\frac{2(x - x^2)}{1 - 2x}$, und die Tangente nichts anders ist, als die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks, welches mit eben derselben die Subtangente und die Ordinate schliessen, folglich ist im Zirkel

$$\text{Tang}^2 = \left(\frac{2x - 2x^2}{1 - 2x}\right)^2 + y^2$$

oder wenn statt y sein Werth gesetzt wird

$$\text{Tang}^2 = \left(\frac{2x - 2x^2}{1 - 2x}\right)^2 + x - x^2$$

$$\text{Tang}^2 = \frac{4x^2 - 8x^3 + 4x^4}{1 - 4x + 4x^2} + x - x^2$$

$$\text{Tang}^2 = \frac{4x^2 - 8x^3 + 4x^4 + x - 4x^2 + 4x^3 - x^2 + 4x^3 - 4x^4}{1 - 4x + 4x^2}$$

abgek. $$\text{Tang}^2 = \frac{x - x^2}{1 - 4x + 4x^2}$$

$$\sqrt{\quad} \quad \text{Tang} = \frac{\sqrt{x - x^2}}{1 - 2x}$$

§. 117. **Anmerk.** Leichter ist die Mühe zwar ungemein, wenn vorher die Subtangente der Ellipse gefunden wird, weil alsdann in dem rechtwinklichten Dreyecke, welches, wie gerade in der vorigen Anmerkung gesagt worden, Tangente, Subtangente und die Ordinate bilden, alles bis auf eben diese Größe bekannt ist: aber ich wollte geflissentlich durch diese vornichte Bahn zur Wahrheit gelangen, um die Differentialrechnung mehr gang und gäbe zu machen.

§. 118. Lehrsatz. Die Subtangente ist $\frac{2x(a-x)}{a-2x}$

Beweis.

$$2ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{a^2}$$

$\times a^2$ $\quad 2a^2ydy = ac^2dx - 2c^2xdx$

$$\frac{2a^2ydy}{ac^2 - 2c^2x} = dx$$

$\times y$ $\quad \frac{2a^2y^2dy}{c^2(a-2x)} = ydx$

$:dy$ $\quad \frac{2a^2y^2}{c^2(a-2x)} = \frac{ydx}{dy} = \text{Subt.}$

statt y^2 subst. $\frac{2a^2\left(\frac{c^2ax - c^2x^2}{a^2}\right)}{c^2(a-2x)} = \text{Subt.}$

abgek. $\frac{2(ax-x^2)}{a-2x}$ oder $\frac{2x(a-x)}{a-2x} = \text{Subt.}$

§. 119. Anmerk. Um öfter zu zeigen, daß durch die verschiedensten Methoden am Ende doch immer die nämliche Wahrheit erzielt wird, so wollen wir durch Hilfe der Subtangente noch einmal die Tangente bestimmen. Es wird sich die nämliche Formel ergeben, die wir oben durch die Differentialrechnung gewonnen haben. Wegen dem rechtwinklichten Dreyecke ist demnach Fig. 31

$$tm^2 = tp^2 + mp^2$$

oder $\quad \text{Tang}^2 = \text{Subt}^2 + y^2$. Für beydes

subst. $\quad \text{Tang}^2 = \left(\frac{2ax-2x^2}{a-2x}\right)^2 + \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$

$$\text{Tang}^2 = \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a-2x)^2} + \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$$

Zu

Zu gleichen Nennern gebracht, giebt demnach $\text{Tang}^2 =$

$$\frac{4a^4x^2-8a^3x^3+4a^2x^4+a^3c^2x-4a^2c^2x^2+4ac^2x^3}{a^2(a-2x)^2}$$

abgek. $\text{Tang}^2 = \frac{4a^4x^2-8a^3x^3+4a^2x^4}{a^2(a-2x)^2}$,

$$\frac{+a^3c^2x-5a^2c^2x^2+8ac^2x^3-4c^2x^4}{a^2(a-2x)^2}$$

Wird nun der Zähler dieses Bruches durch den Faktor $ax-x^2$ dividiert, so erhält man zum Quotus den andern Faktor $4a^3x-4a^2x^2+a^2c^2-4ac^2x+4c^2x^2$, oder was eins ist $a^2c^2+4x(a^3-a^2x-ac^2+c^2x)$

Folgl. $\text{Tang}^2 = \frac{(ax-x^2)(a^2c^2+4x(a^3-a^2x-ac^2+c^2x))}{a^2(a-2x)^2}$

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{(ax-x^2)(a^2c^2-ac^2x+4c^2x+4a^2(ax-x^2))}}{a(a-2x)}$$

§. 120. **Lehrsatz.** Wenn die Abscisse zur halben Achse wird, so ist Tangente und Subtangente einander gleich, das heißt sie sind beyde unendlich.

Voraussetzung:

$$x = \tfrac{1}{2}a$$

Satz.

Tang. = Subt. = ∞

Beweis.

1) Erwiesen wurde, daß

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{(ax - x^2)(a^2c^2 + 4x(a^3 - a^2x - ac^2 + c^2x))}}{a(a - 2x)}$$

Nun für x das vorausgesetzte $\frac{1}{2}$ a substituiert

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\left(a^2c^2 + \frac{4a}{2}\left(\frac{a^3}{2} - a^3 - ac^2 + \frac{c^2a}{2}\right)\right)}}{a\left(a - \frac{2a}{2}\right)}$$

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2\left(a^2c^2 + 2a\left(\frac{a^3}{2} - \frac{ac^2}{2}\right)\right)}}{aX\ (a-a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2\left(a^2c^2 + a^4 - \frac{a^2c^2}{4}\right)}}{0} = \infty$$

folglich Tang $= \infty$

2) Ferner Subt. $= \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$

Substituiert Subt. $= \frac{2a^2 - \frac{2a^2}{4}}{a - \frac{2a}{2}}$

Subt. $= \frac{a^2 - \frac{1}{2}a^2}{a - a}$

Subt. $= \frac{\frac{1}{2}a^2}{0} = \infty$. Da nun auch

Tang $= \infty$

so ist Tang $=$ Subt $= \infty$

§. 121.

§. 121. **Lehrsatz.** Die Subnormal in der Ellipse ist $\frac{a c^2 - 2 c^2 x}{2 a^2}$ oder $c^2 \left(\frac{a - 2 x}{2 a^2}\right)$

Beweis.

$$2 y dy = \frac{a c^2 dx - 2 c^2 x dx}{a^2}$$

$$: 2 \qquad y dy = \frac{a c^2 dx - 2 c^2 x dx}{2 a^2}$$

$$: dn \qquad \frac{y dy}{dx} = \frac{a c^2 - 2 c^2 x}{2 a^2}$$

aber $\frac{y dy}{dx} =$ Subnorm.

---

also Subnorm. $\frac{a c^2 - 2 c^2 x}{2 a^2} = c^2 \left(\frac{a - 2 x}{2 a^2}\right)$

§. 122. **Lehrsatz.** Die Normal ist in der Ellipse $\frac{\sqrt{a^2 c^2 + 4 x (a^3 c - c^2 a^2 x - a c^3 + c^4 x}}{2 a^2}$

Beweis. Fig. 31

In dem Δ m p q ist

$$m q^2 = p q^2 + m p^2$$

oder $\text{Norm}^2 = \text{Subnorm}^2 + y^2$

subst. $= \left(\frac{a c^2 - 2 c^2 x}{2 a^2}\right)^2 + \frac{a c x - c^2 x^2}{a^2}$

$$= \frac{a^2 c^4 - 4 a c^4 x + 4 c^4 x^2}{4 a^4} + \frac{a c x - c^2 x^2}{a^2}$$

Die

Die Nenner gleich gemacht, d. i. die Zähler und Nenner des zweyten Bruches durch $4a^2$ multipliciert

$$\text{Norm}^2 = \frac{a^2c^4 - 4ac^4x + 4c^4x^2 + 4a^3cx - 4a^2c^2x^2}{4a^4}$$

abgek. $$\text{Norm}^2 = \frac{a^2c^4 + 4x(a^3c - ac^4 + c^4x - a^2c^2x)}{4a^4}$$

$$\text{Norm} = \frac{\sqrt{a^2c^4 + 4x(a^3c - ac^4 + c^4x - a^2c^2x)}}{2a^2}$$

§. 123. **Anmerk.** Setzt man $c = a$, so kömmt zum Vorschein

$$\text{Norm} = \frac{\sqrt{a^6 + 4x(a^4 - a^4 + a^4x - a^4x)}}{2a^2}$$

$$\text{Norm} = \frac{\sqrt{a^6}}{2a^2} = \frac{a^3}{2a^2} = \frac{a}{2}$$

die Normal vom Zirkel; weil bekannt ist, daß jeder Halbmesser perpendikulär auf seiner Tangente steht, folglich die Normal abgiebt.

§. 124. **Lehrsatz.** Wenn die Abscisse zur halben großen Achse wird, so verwandelt sich die Normal in die halbe kleine Achse, und die Subnormal verschwindet gänzlich.

Voraussetzung.

$$x = \tfrac{1}{2}a$$

Sätze.

1) Norm. $= \tfrac{1}{2}c$
2) Subnorm. $= 0$

Erster

Erster Beweis.

Es ist Norm $= \frac{c}{2a} \sqrt{a^2 c^2 + 4x(a^3 - a^2 x - a c^2 + c^2 x)}$. Statt x substituiert

Norm $= \frac{c}{2a^2} \sqrt{a^2 c^2 + 2a\left(a^3 - \frac{a^3}{2} - a c^2 + \frac{c^2 a}{2}\right)}$

abgek. $= \frac{c}{2a^2} \sqrt{a^2 c^2 + 2a\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a c^2}{2}\right)}$

$= \frac{c}{2a^2} \sqrt{a^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2}$

$= c \sqrt{\frac{a^4}{2a^2}}$

$= \frac{c a^2}{2 a^2}$

Norm $= \frac{1}{2} c$

Zweyter Beweis.

$$\text{Subnorm} = \frac{c^2 (a - 2x)}{2 a^2}$$

statt x wird $\frac{1}{2}$ a substituiert, so entsteht

$$\text{Subnorm} = \frac{c^2 (a - a)}{2 a^2}$$

abgek. $= \frac{c^2 \times 0}{2 a^2} = \frac{0}{2 a^2}$

Folgl. Subnorm $= 0$

§. 125. **Anmerk.** Wir haben hier mit Absicht die einzige Gleichung, wo statt des Parameters die kleine Achs in die Rechnung gebracht ist, zur Findung der Tangente, Subtangente, Normal und Subnormal gebraucht; weil die beyden Achsen bey jeder Ellipse unmittelbar sogleich in die Augen fallen. Es sieht jeder von selbst, daß auch andere Gleichungen.

gen, wo nicht alle, dazu dienlich wären. Zur vollen Ueberzeugung soll die Subtangente von der kleinen Achse aus bestimmt werden. Man muß dießfalls die Aequation $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$ in den Differentialkalkul aufnehmen. Weil aber hier z eine Abscisse vom Mittelpunkte an gerechnet bedeutet, so wird es gut seyn, statt selber ein Aequivalent von Scheitelabscissen zu setzen. Bezeichne man eine solche dem Φ entsprechende Abscisse durch Ψ, so ist sehr natürlich, wie dieß aus Fig. 32 erhellet, wo $a\,p = a\,c - p\,c$,

daß $\Psi = \frac{c}{2} - z$ und $z = \frac{c}{2} - \Psi$ sey

Folglich $z^2 = \frac{1}{4}c^2 - c\Psi + \Psi^2$

Subst it in $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$ giebt

$$\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{1}{4}c^2 - c\Psi + \Psi^2\right)$$

wirkl. mult. $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \frac{+a^2 c\Psi - a^2\Psi^2}{c^2}$

abgek. $\Phi^2 = \frac{a^2 c\Psi - a^2\Psi^2}{c^2}$

diff. $2\Phi\,d\Phi = \frac{a^2 c\,d\Psi - 2a^2\Psi\,d\Psi}{c^2}$

$\times c^2$ $2c^2\Phi\,d\Phi = a^2 c\,d\Psi - 2a^2\Psi\,d\Psi$

$$\frac{2c^2\Phi\,d\Phi}{a^2 c - 2a^2\Psi} = d\Psi$$

$\times\Phi$ $$\frac{2c^2\Phi^2\,d\Phi}{a^2 c - 2a^2\Psi} = \Phi\,d\Psi$$

$:d\Phi$ $$\frac{2c^2\Phi^2}{a^2 c - 2a^2\Psi} = \frac{\Phi\,d\Psi}{d\Phi} = \text{Subt.}$$

statt Φ^2 den Werth $\frac{a^2 c\Psi - a^2\Psi^2}{c^2}$ gesetzt

kömmt

kömmt $\dfrac{2c^2\left(\dfrac{a^2c\psi - a^2\psi^2}{c^2}\right)}{a^2c - 2a^2\psi} = \text{Subt.}$

abgek. $\dfrac{2c\psi - 2\psi^2}{c - 2\psi} = \text{Subt.}$

Es ist dieß der nämliche Ausdruck wie bey der großen Achse. Setze man, die Funktion ψ wachse so lange bis sie $= \frac{1}{2}c$ wird, so verwandelt sich die Formel in diese: $\dfrac{\frac{2c^2}{2} - \frac{2c^2}{4}}{c - \frac{2c}{2}} = \dfrac{c^2 - \frac{c^2}{2}}{c - c}$

$$= \frac{2c^2 - c^2}{2c - 2c} = \frac{c^2}{0} = \infty$$

Wo also gleiche Eigenschaft wieder Platz hat, wie oben §. 120.

§. 126. **Aufgabe.** Die Ellipse zu rektificieren.

Auflösung. Man differenziere die simpelste Gleichung z. B.

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2v^2}{a^2}$$

giebt $2ydy = -\dfrac{2c^2vdv}{a^2}$

:2 $ydy = -\dfrac{c^2vdv}{a^2}$

quad. $y^2dy^2 = \dfrac{c^4v^2dv^2}{a^4}$

div.

div. durch $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 - c^2 v^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}$

$$dy^2 = \frac{c^4 v^2 dv^2}{a^4} \times \frac{4 a^2}{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2} = \frac{4 a^2 c^4 v^2 dv^2}{a^6 c^2 - 4 a^4 c^2 v^2}$$

den Bruch verkl. durch $a^2 c^2$ giebt $= \frac{4 c^2 v^2 dv^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}$

$$\frac{+ dv^2}{dy^2 + dv^2} \qquad \frac{+ dv^2}{}$$

$$dy^2 + dv^2 = \frac{4 c^2 v^2 dv^2}{a^4 - 4 a^2 v^2} + dv^2$$

$$= \frac{4 c^2 v^2 dv^2 + a^4 dv^2 - 4 a^2 v^2 dv^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}$$

oder $= dv^2 \left(\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}\right) = \frac{dv^2}{a^2} \left(\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}\right)$

$$\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a} \sqrt{\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}} = \frac{dv}{a} \sqrt{\frac{a^4 + 4 c^2 v^2 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}}$$

$$= \frac{dv}{a} \sqrt{\frac{a^4 + (4 c^2 - 4 a^2) v^2}{a^2 - 4 v^2}}$$

oder endlich $= \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - 4(a^2 - c^2)v^2}{a^2 - 4v^2}}$

Setzt man endlich aus Bequemlichkeit $4(a^2 - c^2) = m$ so erscheint

$\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - mv^2}{a^2 - 4v^2}}$. Nun noch aus Zähler und Nenner die Wurzel nach dem Binomiallehrsatze ausgezogen, so erhält man erstens

$$(a^4 - mv^2)^{\frac{1}{2}} = a^{4\times\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{4\times-\frac{1}{2}}\times -mv^2 + \frac{\tfrac{1}{2}\times-\tfrac{1}{2}}{1\times2}a^{4\times-\frac{3}{2}}\times +(mv^2)^2 + \frac{\tfrac{1}{2}\times-\tfrac{1}{2}\times-\tfrac{3}{2}}{1\times2\times3}a^{4\times-\frac{5}{2}}\times -(mv^2)^3$$

abgek. $= a^2 - \frac{mv^2}{2a^2} - \frac{m^2v^4}{8a^6} - \frac{m^3v^6}{16a^{10}} \ldots\ldots$

Zweytens $(a^2 - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2\times\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{2\times-\frac{1}{2}}\times -4v^2 + \frac{\tfrac{1}{2}\times-\tfrac{1}{2}}{1\times2}a^{2\times-\frac{3}{2}}\times +(4v^2)^2 + \frac{\tfrac{1}{2}\times-\tfrac{1}{2}\times-\tfrac{3}{2}}{1\times2\times3}a^{2\times-\frac{5}{2}}\times -(4v^2)^3 \ldots\ldots$

abgek.

abgek. $= a - \frac{4v^2}{2a} - \frac{16v^4}{8a^3} - \frac{64v^6}{16a^5} \ldots$

noch mehr $= a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} - \frac{4v^6}{a^5} \ldots$

Weil aber $m = 4a^2 - 4c^2$
und $m^2 = 16a^4 - 32a^2c^2 + 16c^4$
wie auch $m^3 = 64a^6 - 192a^4c^2 + 192a^2c^4 - 64c^6$, so kann in der Reihe dafür substituiert werden.

Folglich $a^2 - \frac{4a^2v^2}{2a^2} + \frac{4c^2v^2}{2a^2} - \frac{16a^4v^4}{8a^6} + \frac{32a^2c^2v^4}{8a^6} - \frac{16c^4v^4}{8a^6} - \frac{64a^6v^6}{16a^{10}}$
$+ \frac{192a^4c^4v^6}{16a^{10}} - \frac{192a^2c^4v^6}{16a^{10}} + \frac{64c^6v^6}{16a^{10}} \ldots$

Abgek. $a^2 - 2v^2 + \frac{2c^2v^2}{a^2} - \frac{2v^4}{a^2} + \frac{4c^2v^4}{a^4} - \frac{2c^4v^4}{a^6} - \frac{4v^6}{a^4} + \frac{12c^2v^6}{a^6} - \frac{12c^4v^6}{a^8}$
$+ \frac{4c^6v^6}{a^{10}} \ldots$

Und durch $a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} - \frac{4v^6}{a^5} \ldots$ div., giebt $a + \frac{2c^2v^2}{a^3} + \frac{8c^2v^4}{a^5} - \frac{2c^4v^4}{a^7} \ldots$

Doch

Daher $\sqrt{dv^2+dy^2} = \frac{dv}{a}\left(a+\frac{2c^2v^2}{a^8}+\frac{8c^2v^4}{a^5}-\frac{2c^4v^4}{a^7}\ldots\right)$

$= dv+\frac{2c^2v^2dv}{a^3}+\frac{8c^2v^4dv}{a^6}-\frac{2c^4v^4dv}{a^8}\ldots$

$S(\sqrt{dv^2+dy^2}) = v+\frac{2c^2v^3}{3a^4}+\frac{8c^2v^5}{5a^6}-\frac{2c^4v^5}{5a^8}\ldots$

oder $v+\frac{2c^2v^3}{3a^4}+\left(\frac{8a^2c^2-2c^4}{5a^8}\right)v^5\ldots$ Sezt man nun

$v = \frac{1}{2}a$ so iſt der vierte Theil der Ellipſe rektificiert:

$\frac{1}{2}a+\frac{2c^2a^3}{24a^4}+\frac{(8a^2c^2-2c^4)a^5}{5\times 32a^8}\ldots$

abgek. $\frac{1}{2}a+\frac{c^2}{12a}+\frac{8a^2c^2-2c^4}{160a^3}\ldots$ Dieß viermal genommen, giebt die ganze rektificierte Ellipſe

$2a+\frac{c^2}{3a}+\frac{8a^2c^2-2c^4}{40a^3}\ldots = 2a+\frac{c^2}{3a}+\frac{4a^2c^2-c^4}{20a^3}\ldots$

§. 127. Zusatz. Wird $a = c = 2$, so erhält man wieder die Rektifikation des Zirkels in Halbmeßern wie §. 72. Diff.

$$4 + \frac{4}{6} + \frac{8 \times 4 \times 4 - 5 \times 16}{10 \times 8} \ldots$$

$$4 + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \ldots$$

§. 128. Zusatz. Indeß fällt bey Bestimmung der Länge einer Ellipsenlinie die Sache doch allemal anderst aus, wenn ein Zirkel, welcher zum Diameter die geometrische Mittelgröße beyder ihrer Achsen hat; und wenn die Ellipse selbst berechnet wird: obwohl es in Rücksicht der Quadratur und Kubatur, wie wir hören werden, immerhin wahr bleibt, daß die beyden Rechnungen am Ende auf eins hinaus laufen. Denn bildet man sich eine Ellipse ein, deren kleine Achse unendlich klein ist, wie der Fall doch sehr wohl Möglichkeit zuläßt, so ist klar, daß die Länge einer solchen Ellipsenlinie der doppelten großen Achse ungemein nahe kommen muß, und dieß erhält man auch aus der Reihe. Es sey nämlich $c = \frac{1}{\infty}$ so ergiebt sich

$$2a + \frac{\frac{1}{\infty 2}}{3a} + \frac{4a^2 \frac{1}{\infty 2} - \frac{1}{\infty 4}}{20a^3} \ldots$$ wo alle

übrigen Glieder nach §. 18 Diff. bis auf $2a$ verschwinden; welches aber, wenn $a = a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$ gedacht wird, bey Zirkel niemals wahr seyn kann; weil schon nothwendig das erste Glied unendlich klein seyn muß, ohne erst von den übrigen Gliedern zu reden.

§. 129. Anmerk. Ich kann nicht umhin, ein Beyspiel zu einiger Anwendung dieser unsrer Rektifikation hier einzuweben. Irgendwo mußte eine Rennbahn, weil es die Lage des Platzes nicht anders verstattete, elliptisch ausgesteckt werden.

werden. Die größte Länge des in der Mitte eingefangten Raumes betrug 472 Schritte, und die Breite desselben 280 Schritte. Wie viel dergleichen Schritte mag beyläufig diese Rennbahn groß seyn?

Auflösung. Diese angegebne Länge und Breite stellen nichts anders als Achsen der elliptischen Rennbahn vor. Daher ist in diesem besondern Fall die Reihe

$$= 2 \times 472 + \frac{280^2}{3 \times 470} + \frac{4 \times 472^2 \times 280^2 - 280^4}{20 \times 472^3} \ldots$$

$$= 944 + \frac{78400}{1416} + \frac{6986506240000 - 6146560000}{2103081960}$$

$= 944 + 55 + 30 + 5 \ldots = 1034$ Schritte ungefähr.

§. 130. **Aufgabe.** Eine Ellipse quadrieren.

Auflösung. Es werde in einer der sechs Gleichungen ein Aequivalent für ydx oder ydv gefunden und integriert, so erhält man, wenn v oder $x = \frac{1}{2}a$ gesetzt wird, den vierten Theil der Ellipsenfläche. Z. B. wieder in

$$y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 - c^2 v^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}} = \frac{c}{2a}\sqrt{a^2 - 4 v^2}$$

$$x\,dv \qquad y\,dv = \frac{c\,dv}{a^2}\sqrt{a^2 - 4 v^2}$$

Aus $a^2 - 4v^2$ wirkl. die Wurzel gezogen

$$\sqrt{a^2 - 4v^2} = (a^2 - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2 \times \frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} a^{2 \times -\frac{1}{2}} \times -4v^2 + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2} a^{2 \times -\frac{3}{2}} \times +16 v^4 \ldots$$

oder

oder $= a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} \ldots$

Folgl. $ydv = \frac{cdv}{2a}\left(a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} \ldots\right)$ oder

$$ydv = \frac{cdv}{2} - \frac{cv^2dv}{a^2} - \frac{cv^4dv}{a^4} \ldots$$

$$S(ydv) = \frac{cv}{2} - \frac{cv^3}{3a^2} - \frac{cv^5}{5a^4} \ldots$$

Das $v = \frac{a}{2}$ gesetzt, giebt den Quadranten

$$S(ydv) = \frac{ac}{4} - \frac{ac}{24} - \frac{ac}{40} \ldots$$

Durch 4 mult., so ist

Quadratura Ellipf. $= ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{160} \ldots$

§. 131. Zusatz. Sezt man $a = c = 2$, so verwandelt sich diese Reihe in jene des Zirkels $4 - \frac{4}{6} - \frac{4}{10} \ldots = 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \ldots$ wie §. 76 Diff. oder ist $a = c = d$, $d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \ldots$

§. 132. Zusatz. Das nämliche ergiebt sich, wenn für a und c die geometrische Mittelgröße $\sqrt{ac}$ oder $a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$ in die Reihe aufgenommen wird, und diese beständige Quantität z. B. durch 2r ausgedruckt wird.

$$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}{6} - \frac{a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}{40}$$

oder $4r^2 - \frac{4r^2}{6} - \frac{4r^2}{40} \ldots$

$4r^2 - \frac{2}{3}r^2 - \frac{1}{10}r^2 \ldots$

§. 133.

§. 133. Zusatz. Es ist nun zum drittenmale erwiesen, daß es eines sey, ob man eine Ellipse berechnet oder einen Zirkel, der zum Diameter die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Achsen hat.

Der förmliche Beweis von diesem Satze sieht so aus.

Voraussetzung.

$$d = \sqrt{ac}$$

Satz.

Circ. = Ellipf.

Beweis.

$$C = d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \cdots$$

$$E = ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} \cdots$$

$$C : E = \left(d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \cdots\right) : \left(ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} \cdots\right)$$

$$\text{oder} \quad = d^2\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \cdots\right) : ac\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \cdots\right)$$

$C : E = d^2 : ac$

aber $d = \sqrt{ac}$

also $d^2 = ac$ subst.

$C : E = d^2 : d^2$ und

$:d^2 \quad d^2 C = d^2 E$

$C = E$

§. 134. **Lehrsatz.** Der Quadratinhalt einer Ellipse ist beynahe der vierte Theil des Produkts aus den beyden Achsen und der Zahl 3, 14...

Satz.

$$\text{Quad. Ellipf.} = \frac{a\,c\,\pi}{4}$$

Beweis.

Im Zirkel ist $q = \frac{d^2\,\pi}{4}$

aber in einer gleichgroßen Ellipse ist

$$d = a^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a\,c}$$

und $$d^2 = a\,c$$

Subst.

$$\text{Quad. Ellipf.} = \frac{a\,c\,\pi}{4}$$

§. 135. **Anmerk.** Wir halten uns zu lange auf, auch verschiedne Abschnitte der Ellipse, wie bey der Parabel, zu berechnen. Daß aber indeß die Sache möglich sey, sieht aus dem bisherigen jeder von selbst.

§. 136. **Aufgabe.** Jede Ellipse durch Zeichnung in einen Zirkel zu verwandeln.

Auflösung. Man setze in gerader Richtung die halbe kleine Achse an die halbe große Achse, schwinge um diese beyden Achsenhälften einen halben Zirkel und falle von der Peripherie auf dem Zusammenstossungspunkt einen Perpendikel herab, so ist dieß der Radius eines Zirkels, der gleiche Flächengröße mit der Ellipse hat.

Satz. Fig. 35.

$$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = k m$$

Beweis.

Es ist $ab : bd = bd : bc$ oder nach der Subst. $\frac{a}{2} : \frac{mk}{2} = \frac{mk}{2} : \frac{c}{2}$

2X

$$a : mk = mk : c$$

$$ac = mk^2$$

$$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = mk$$

§. 137. **Anmerk.** Eine kleine Anwendung hierüber fürs Praktische. Irgend ein französischer Mahler war gewohnt seine Freskogemälde nach Quadratmaaß zu übernehmen, und sich für den Schuh 4 Livers zahlen zu lassen. Nun sollte er ein großes Plafond mahlen, das eine wahre elliptische Figur hatte von 55 Fuß Länge und 33 Fuß Breite. Er foderte gemäß seinem Ueberschlage 6000 Livers. Es fragt sich demnach, ob diese Foderung billig war?

Auflösung. Weil $q = \frac{ac\pi}{4}$ ist, so darf nur substituiert werden: folglich

$$q = \frac{55 \times 33 \times 3{,}14..}{4} = \frac{5699{,}1}{4} = 1424{,}7 \square\text{schuhe.}$$

Dieß mit 4 multipliciert, giebt 5698,8 Livers. Er hat daher um 301,2 Livers zu viel gefodert.

§. 138. **Erkl.** Dreht sich die Ellipse um die große Achse, so entsteht eine länglichte Sphäroide, oder Afterkugel; hingegen, um die kleine Achse, eine platte Sphäroide.

§. 139. **Anmerk.** Es giebt noch eine dritte Gattung von Elliptoiden, welche entstehen, wenn eine Ellipse durch einen schiefen Diameter in zween gleiche Theil getheilt, und wenn dann ein solches Stück um seine Achse bewegt wird. Dieser birnförmige Körper nun wird ein geometrisches Herz

genannt. d'Alemberts Berechnung dieses Körpers verräth einen sehr tiefen Blick in die inneren Geheimnisse der Mathematik. Sie kann im deutschen Realwörterbuch unter dessen Artikel nachgeschlagen werden.

§. 140. **Aufgabe.** Eine länglichte Sphäroide kubieren.

Auflösung. Das Element jedes runden Körpers ist nach §. 82 Diff. $\pi y^2 dx$. Man bestimme es daher in einer der sechs Gleichungen, z. B. in

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times \pi dx \qquad \pi y^2 dx = \frac{\pi c^2 x dx}{a} - \frac{\pi c^2 x^2 dx}{a^2}$$

$$S(\pi y^2 dx) = \frac{\pi c^2 x^2}{2a} - \frac{\pi c^2 x^3}{3a^2}$$

Wenn nun $x = \frac{1}{2} a$ wird

$$S = \frac{\pi c^2 a^2}{8a} - \frac{\pi c^2 a^3}{24 a^2}$$

$$= \frac{\pi c^2 a}{8} - \frac{\pi c^2 a}{24}$$

Die Nenner gleich gemacht

$$S = \frac{3\pi a c^2 - \pi a c^2}{24} = \frac{2\pi a c^2}{24} = \frac{\pi a c^2}{12}$$

Weil aber dieß nur die halbe Elliptoide seyn kann, so ist

$$S = \frac{a c^2 \pi}{6}$$

§. 141. **Zusatz.** Nimmt man mehrmals an daß $a = c = d$ sey, so verwandelt sich unser Ausdruck $\frac{a c^2 \pi}{6}$ in die Kugelformel $\frac{d^3 \pi}{6}$ Geom. §. 240.

§. 142. **Zusatz.** Es wird unschwer einzusehen seyn, daß man sich bey der Kubatur der platten Elliptoide einer Gleichung bedienen müsse, wo die Ordinaten auf der kleinen Achse gezogen sind.

§. 143. **Anmerk.** Nehmen wir zur Anwendung folgende Aufgabe für uns. In Ermanglung einer richtigen Feinwage, soll der Werth einer aus Silber verfertigten Zitrone durch die Geometrie berechnet werden. Sie hält $2\frac{3}{4}$ Zoll in der Länge und 2 Zoll in der Dicke rheinländischen Maases.

Auflösung. Da die Figur einer Zitrone den Elliptoiden sehr nahe, wo nicht ganz damit übereins kömmt, so muß sie auch nach der Elliptoidenformel berechnet werden. Folglich

$$\frac{2\frac{3}{4} \times 2^2 \times 3{,}14}{6} = \frac{\frac{11}{4} \times 4 \times 3{,}14}{6} = \frac{11 \times 3{,}14}{6} = \frac{34{,}54}{6}$$

$= 5{,}756$ Kubikzoll. Da nun nach Prof. Karsten in seinem Auszuge, Statik §. 14 ein rheinländischer Kubikzoll Silber 3283 Gran (köllnisches Gewicht) wiegt, und die Mark Silber ungefähr auf 20 fl. angesetzt werden darf, so gilt die Proportion

1 Mark : 20 fl = 3283 Gran : x fl
oder 5760 G. : 20 = 3283 : x
$5760x = 65660$
$x = \frac{65660}{5760} = 11$ fl $23\frac{2}{2}\frac{3}{4}$ kr.
für 1 Kubikzoll

§. 144. **Anmerk.** Die Berechnung der Sphäroiden hat vorzüglich ihren Nutzen in der Baukunst, wenn man die Masse oder den Druck elliptischer Rundgewölber zu berechnen wünscht.

§. 145. **Aufgabe. Die Oberfläche der Elliptoide zu bestimmen.**

Auf-

Auflösung. Das Oberflächenelement ist, wie wir es schon bey der Parabel genutzt haben, $2\pi y\sqrt{dv^2+dy^2}$, wo $2\pi y$ die Peripherie jedes runden Körpers und $\sqrt{dv^2+dy^2}$ den unendlich kleinen Abstand von einem Kreise eines solchen Körpers bis zum andern ausdrückt. Folglich wollen wir einen Werth dafür in der differentierten Gleichung finden, z. B. wieder in

$$2y\,dy = \frac{-2c^2 v\,dv}{a^2}$$

$$4y^2 dy^2 = \frac{4c^4 v^2 dv^2}{a^4}$$

$$+4y^2 dv^2 = +4\left(\tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right) dv^2$$

$$4y^2 dy^2 + 4y^2 dv^2 = \frac{4c^4 v^2 dv^2}{a^4} + 4\left(\tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right) dv^2$$

$$4y^2(dy^2+dv^2) = 4c^2 dv^2\left(\frac{c^2 v^2}{a^4} + \tfrac{1}{4} - \frac{v^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{4c^2 dv^2}{a^4}\left(c^2 v^2 + \tfrac{1}{4}a^4 - a^2 v^2\right)$$

$$2y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{2cdv}{a^2}\sqrt{(c^2v^2+\tfrac{1}{4}a^4-a^2v^2)}$$

$\times\pi$ $$2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{2\pi cdv}{a^2}\sqrt{c^2v^2+\tfrac{1}{4}a^4-a^2v^2}$$

oder $$2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{4c^2v^2+a^4-4a^2v^2}$$

$$= \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{a^4-4(a^2-c^2)v^2}$$

Und wenn $4(a^2-c^2)$ wieder m gelten soll

$$2\pi y\sqrt{dy^2-dv^2} = \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{a^4-mv^2}$$

Folg. Es ist aber $$\sqrt{a^4-mv^2} = a^2-\frac{mv^2}{2a^2}-\frac{m^2v^4}{8a^6}-\frac{m^3v^6}{16a^{10}}$$ §. 126

Folglich $2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{\pi c\,dv}{a^2}\left(a^2\,dv - \frac{m v^2\,dv}{2a^2} - \frac{m^2 v^4\,dv}{8a^6} - \frac{m^3 v^6\,dv}{16a^{10}}\ldots\right)$

$$S(2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2}) = \frac{\pi c}{a^2}\left(a^2 v - \frac{m v^3}{6a^2} - \frac{m^2 v^5}{40a^6} - \frac{m^3 v^7}{112a^{10}}\ldots\right)$$

$$= \pi\left(cv - \frac{mcv^3}{6a^4} - \frac{m^2 cv^5}{40a^8} - \frac{m^3 cv^7}{112a^{12}}\ldots\right)$$

Wird $v = \frac{1}{2}a$, so ist endlich

$$S(2\pi y \text{ \&c.} = \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{mc}{48a} - \frac{m^2 c}{1280a^3} - \ldots\right)$$

Und zulezt noch für m subſtit. $= \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{4(a^2-c^2)c}{48a} - \frac{16(a^2-c^2)^2 c}{1280a}\ldots\right)$

abgek. $= \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{(a^2-c^2)c}{12a} - \frac{(a^2-c^2)^2 c}{80a^3}\ldots\right)$

Folglich die ganze Oberfläche $= \pi\left(ca - \frac{(a^2-c^2)c}{6a} - \frac{(a^2-c^2)^2 c}{40a^3}\ldots\right)$

S. 146.

§. 146. **Zusatz.** Auch hier kömmt die Oberfläche der Kugel zum Vorschein, wenn $c = a = d$ angenommen wird, indem alle Glieder der unendlichen Reihe, das erste ausgenommen, zu Null werden, und nur noch $d^2 \pi$ übrig bleibt.

§. 147. **Anmerk.** Ein kleines Beyspiel dörfte auch dießmal nicht schaden. Ein Physiker möchte sich gerne einen Luftballon anschaffen, um damit Versuche zu machen. Wie viel wird er Taffent dazu vonnöthen haben, wenn derselbe 3 Ellen hoch und 2 Ellen dick werden soll?

Auflösung. Da ein solcher Ballon eine Ellipsoide giebt, so muß der Taffent von aussen die Oberfläche derselben vorstellen. Folglich gilt die Reihe

$$= 3{,}14\left(3\times 2 - \frac{(9-4)\times 2}{18} - \frac{(9-4)^2\times 2}{40\times 27}\ldots\right)$$

$$= 3{,}14\left(6 - \frac{10}{18} - \frac{50}{1080}\ldots\right)$$

$$= 3{,}14\left(6 - \frac{5}{9} - \frac{5}{108}\ldots\right) = 3{,}14\left(6 - \frac{60+5}{108}\ldots\right)$$

$$= 3{,}14\left(6 - \frac{65}{108}\right) = 3{,}14\times 5\,\frac{43}{108} = \frac{3{,}14\times 583}{108}$$

$$= \frac{1830{,}62}{108} = 16{,}9$$ d. i. beynahe 17 Ellen, wenn der Taffent ellenbreit ist.

§. 148. **Anmerk.** Endlich käme die Reihe auch an die Verfahrungsart, wie man unendlicherley Ellipsen auf einmal rektificieren, quadrieren u. s. f., ingleichen auch, wie man ihre Tangenten und Normalen allgemein bestimmen müsse; weil aber dieser Artikel von keinem sonderlichen Belange ist, und zudem der Kalkul hierüber sehr weitläuftig und mühsam läßt, so wollen wir sie übergehen, und statt dessen hier am Ende der abgehandelten Ellipse nur noch anmerken, daß diese krumme Linie und ihre vorgetragene Lehrsätze in der Astronomie eine ungemein ausgebreitete Anwendung finden; weil die Laufbahnen der Erde und der übrigen Planeten lauter Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet, vorstellen, folglich auch nach ihren Gesezen berechnet werden müssen.

Von

Von der Hyperbel.

§. 149. Erkl. Wenn man sich vorstellt, daß auf der Spitze jenes Kegels, woraus eine Hyperbel geschnitten worden, ein anderer gleich großer Kegel gerade umgekehrt stehe, so wird die rückwärts verlängerte Abscissenlinie der Hyperbel auch diesen Kegel schneiden und zur neuen entgegengesetzten Abscissenlinie werden. Die Entfernung nun von einem Schnitte zum andern wird die Achse der Hyperbel, und der aus dem Vereinigungspunkt der Kegelspitzen darauf hingefällte Perpendikel, die Querachse, Nebenachse (wir wollen sie mehrmal durch c bezeichnen) genennt. Die Vertikalschenkel jener Dreyecke, welche durch der Kegel Mitte gehen heissen die Assymtoten der Hyperbel. Ein solches Dreyeck kömmt in mathematischen Schriften oft unter dem Name des Achsentriangels vor. Fig. 36 ist demnach a g die Achse

d c = a k wegen Parallelismus die halbe Querachse, und weil wegen dem gleichschenklichten Dreyecke a k = q k, so ist auch

a q die ganze Querachse. Und endlich

d s sammt d l die Assymtoten.

§. 150. Zusatz. Da der Achsentriangel in der ganzen Runde des Kegels herum sich selbst gleich bleibt, so kann derselbe auch parallel mit der Hyperbelfläche gedacht werden, welches man auch eigentlich für die gehörige Lage zu einander annimmt. In dieser Lage nun stehen die Aeste der Hyperbel auf den Endpunkten einer Sehne von des Kegels Grundfläche und die Assymtoten auf den Endpunkten des Diameters. Weil aber bey jeder Verlängerung des Kegels, und zwar bis ins Unendliche

dieß

dieß wahr bleibt, so folgt itzt schon klar daraus, daß die Hyperbeläste von den Assymtoten immer an Divergenz übertroffen werden. Tiefer unten wird dieser Satz auch aus der Natur der Hyperbelgleichung erwiesen werden. Indeß ist die Sache aus der Natur des Schnittes sattsam dargethan, wie aus Fig. 37 erhellet, daß b d immer kleiner seyn müsse als f g.

§. 151. **Anmerk.** Indeß ist dieß nur von solchen Hyperbeln wahr, die mit der Achse des Kegels parallel laufen. Andere Schnitte, die schief durch den Kegel gehen, und sich gegen die Achse neigen, ohne daß sie sich auf der andern Seite des Kegels enden könnten, wenn man ihn auch unendlich verlängern würde, nennt C. L. Schübler zwar auch Hyperbeln, und zwar so lange, bis der Schnitt parallel mit einer Seite des Kegels fortläuft, in welchen Fall, wie bekannt, sich eine Parabel bildet. Allein es ist unumgänglich nothwendig, daß diese angebliche Art von Hyperbeln einmal ihre Assymtoten, oder den Achsentriangel erreichen, weil sie früh oder spät die Kegelachse schneiden müssen; ausser sie würden sich von dieser Achse immer mehr und mehr entfernen, welcher Fall freylich eben sowohl als der erste möglich ist.

§. 152. **Zusatz.** Bey der Ellipse dorfte die Abscisse vorwärts verlängert werden, um die Achse abzugeben; hier bey der Hyperbel muß es rückwärts geschehen: folglich hat sie eine entgegengesetzte Lage und kann mit Recht, weil die Ellipsenachse positiv gesetzt wurde, negativ heißen.

§. 153. **Lehrsatz.** In jedem Punkte der Hyperbel ist das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkte aus drey Faktorn, deren einer der Parameter, der andere die Abscisse, und der dritte die Summe der Abscisse und der Achse ist, alles durch die Achse dividiert.

Satz.

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a+x)}{a}$$

Beweis.

Beweis.

Man schneide mehrmal den Kegel in jener Gegend, wo die krume Linie befindlich ist, parallel mit der Achse durch, so wird irgendwo eine gemeinschaftliche Ordinate dieses entstandnen Zirkels und der Hyperbel auf einem gemeinschaftlichen Punkte der zwo Kurvenachsen perpendikulär stehen. Es ist daher Fig. 36

$$p\,m^2 = h\,p \times p\,f.$$

oder

$$y^2 = h\,p \times p\,f.$$

Nun müssen für h p und p f Werthe gefunden werden.

Weil aber $\triangle$ g q a $\backsim$ $\triangle$ a p h; indem der Winkel p a h = o = x wegen Parallelismus, und zween Winkel rechte sind, so gilt die Proportion

$$g\,a : q\,a = a\,p : p\,h$$

subst.

$$a : c = x : p\,h$$

Folgl.

$$p\,h := \frac{c\,x}{a}$$

Ferner $\triangle$ g a q $\backsim$ $\triangle$ g f p aus obigen Gründen

also

$$g\,a : a\,q = g\,p : p\,f$$

wieder subst.

$$a : c = a+x : p\,f$$

und

$$p\,f = \frac{c\,(a+x)}{a}.$$

Diese Werthe in der ersten Gleichung des Beweises mit h p und p f vertauscht giebt

$$y^2 = \frac{c\,x}{a} \times \frac{c\,(a+x)}{a}$$

oder

$$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x\,(a+x)}{a}.$$

Da aber $\frac{e^2}{a}$ schon in der Ellipse die Stelle des Parameters vertratt, so kann es auch hier geschehen, und ebenfalls durch p ausgedrückt werden. Folglich ist

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a+x)}{a}$$

§. 154.

§. 154. **Zusatz.** Es stimmt sohin die Gleichung der Hyperbel völlig mit der der Ellipse überein, wenn man ausnimmt, daß sich das Minuszeichen in Plus verwandelt habe. Ueberhaupt liegt der ganze Unterschied der beyden Linien darinn, daß die große Achse in der Hyperbel negativ, in der Ellipse hingegen positiv sey; denn setzt man in der Hyperbelgleichung $y^2 = \frac{p\,x\,(a+x)}{a}$ statt $+a$ überall $-a$ hinein, so giebt dieß

$$y^2 = \frac{p\,x\,(-a+x)}{-a} = \frac{-a\,p\,x}{-a} + \frac{p\,x^2}{-a}$$

$$= p\,x - \frac{p\,x^2}{a},$$ wie bey der Ellipse §. 64.

§. 155. **Zusatz.** Das nämliche beweiset sich auch wenn der Parameter in Achsenwerthen ausgedrückt in der Gleichung stehen bleibt. Es ist, weil

$$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x\,(a+x)}{a}$$ §. 153 am Ende.

folglich $$y^2 = \frac{a\,c^2\,x}{a^2} + \frac{c^2\,x^2}{a^2}$$

oder $$y^2 = \frac{c^2\,x}{a} + \frac{c^2\,x^2}{a^2},$$ wo sich mehrmal statt — das Pluszeichen einfindet. Setzt man nun wiederum gleich anfangs im zweyten Gliede überall $-a$, welches aber beym Parameterausdrucke $\frac{c^2}{a}$ nicht geschehen darf, weil der Parameter immer einen positiven Werth beybehalten muß, so kömmt

$$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x\,(-a+x)}{-a}$$

$$= \frac{c^2\,x}{a} + \frac{c^2\,x^2}{-a^2} = \frac{c^2\,x}{a} - \frac{c^2\,x^2}{a^2}$$ zum Vorschein.

§. 156.

§. 156. Zus. Die Urgleichung $y^2 = \frac{px(a+x)}{a}$ kann auch sehr füglich in diese aufgelöset werden

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$ woraus dann der Grund fließt, warum die Kurve derselben Hyperbel genennt wird; weil nämlich das Quadrat der Ordinate um den Ueberschuß $\frac{px^2}{a}$ größer ist, als das Produkt aus dem Parameter in die Abscisse.

§. 157. Zusatz. Auch hier ist es klar, daß es zu beyden Seiten der Abscissenlinie Ordinaten gebe, indem wieder

$$y = \pm\sqrt{\frac{px(a+x)}{a}}$$

oder

$$= \pm\sqrt{\frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}}$$ seyn muß.

§. 158. Zusatz. Es verhalten sich demnach in jedem Punkte der Hyperbel die Quadrate der Ordinaten wie die Produkte aus den Abscissen in die Summe der Achse und Abscisse zusammgenommen. Denn man darf nur, wie in der Ellipse §. 66 zwo Gleichungen in eine Proportion auflösen, so erhält man

$$y^2 : Y^2 = \frac{px(a+x)}{a} : \frac{pX(a+X)}{a}$$

$$y^2 : Y^2 = px(a+x) : pX(a+X) \quad aX$$

$$y^2 : Y^2 = x(a+x) : X(a+X) \quad p:$$

§. 159. Lehrsatz. Die Achse wird sowohl am Anfange als am Ende von der Hyperbel geschnitten.

Beweis.

Beweis.

Man lasse einmal $x = o$ und im zweyten Falle $x = -a$ werden, so verwandelt sich in jedem Falle die Ordinate in Null; denn

$$\text{I} \quad y^2 = \frac{p\,o \times (a+o)}{a} = o$$

also auch $y = o$

$$\text{II} \quad y^2 = \frac{p \times -a(a-a)}{a} = \frac{-p\,a \times o}{a} = o$$

folglich auch $y = o$

§. 160. **Lehrsatz.** Auf der negativen Achse ist keine Ordinate möglich, wohl aber jenseits derselben.

Beweis.

Wäre auf der negativen Achse eine Ordinate möglich, so müßte ihr auch ein Theil derselben als Abscisse entsprechen, z. B. $-\frac{a}{m}$, wo m jede ganze oder auch gemischte Zahl vorstellen soll; aber in diesem Fall ändert sich die Gleichung in

$$y^2 = \frac{p \times -\frac{a}{m}\left(a - \frac{a}{m}\right)}{a}$$

$$y^2 = \frac{-a^2 p}{a\,m} + \frac{a^2 p}{a\,m^2}$$

$$y^2 = \frac{a\,p}{m^2} - \frac{a\,p}{m}$$

Weil nun $m > x$ so ist natürlich $\frac{a\,p}{m^2} < \frac{a\,p}{m}$

Wenn

Wenn sie nun von einander abgezogen werden, bekömmt y^2 einen negativen Werth, folglich y gleich der Quadratwurzel aus einer negativen Größe, welche unmöglich, also auch die Ordinate unmöglich ist. Das erste, was zu erweisen war. Erstreckt sich die Abscisse in der entgegengesetzten Richtung weiter als über den Endpunkt der Achse, so ist sie auch größer als dieselbe. Sie kann wieder durch $-ma$ ausgedrückt werden. Also

$$y^2 = \frac{px(-ma(a-ma))}{a}$$

$$y^2 = -\frac{a^2mp + a^2m^2p}{a}$$

$$y^2 = am^2p - amp$$

$$y^2 = ap(m^2 - m)$$ welches allemal eine positive Zahl giebt, folglich die Wurzel von y^2 und mit ihr die Ordinate möglich macht.

§. 161. **Lehrsatz.** Die Hyperbel ist keine in sich zurückkehrende Linie, wie die Ellipse.

Beweis.

Wenn die Hyperbel in sich zurückkehrte, so müßte es irgend eine größte Ordinate geben; allein diese findet nicht statt, wie aus folgendem Kalkul erhellet; also ist diese Kurve nicht zurückkehrend, sondern ihre Aeste entfernen sich immer mehr und mehr von einander, wie die der Parabel. Hier ist der Kalkul

$$y^2 = \frac{px(a+x)}{a} = \frac{apx+px^2}{a}$$

diff. $$2ydy = \frac{apdx + 2pxdx}{a}$$

$$ay$$

;ay $dy = \frac{apdx + 2pxdx}{2ay}$

;dx $\frac{dy}{dx} = \frac{ap + 2px}{a}$

also hier $o = \frac{ap + 2px}{a}$

Xa $o = ap + 2px$

$-ap = 2px$

:p $-a = 2x$

:2 $-\frac{1}{2}a = x$, das heißt, nur dann hätte eine größte Ordinate statt, wenn die halbe negative Achse zur Abscisse werden könnte; da aber erwiesen worden, daß auf selber keine Ordinate möglich ist, so gehört eine größte Ordinate der Hyperbel unter die Undinge; folglich entfernen sich die Aeste dieser Kurve immer weiter und weiter voneinander, und zwar bis ins unendliche fort.

§. 162. **Lehrsatz.** Werden die Abscissen vom Mittelpunkte der Achse angerechnet, und ebenfalls durch v bezeichnet, so heißt die Gleichung

Satz

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$$

Beweis.

Es ist Fig. 36 $ap = cp - ca$

oder $x = v - \frac{1}{2}a$

Nun in der zwoten Urgleichung substituiert, giebt

$$y^2 = \frac{c^2(v - \frac{1}{2}a)}{a} + \frac{c^2(v - \frac{1}{2}a)^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{c^2 v}{a} - \frac{a c^2}{2a} + \frac{c^2 \left(v^2 - a v + \frac{a^2}{4}\right)}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{c^2 v}{a} - \frac{c^2}{2} + \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{c^2 v}{a} + \frac{c^2}{4}$$

abgek. $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

§. 163. Zusatz. Die Ellipsengleichungen, wo Mittelpunktsabscissen eingeschoben sind, ändern also das Minuszeichen nicht; aber die Glieder müssen versetzt werden, wenn sie den Hyperbelcharakter annehmen sollen.

§. 164. Zusatz. Wir sind nun im Stande gesetzt, alle obigen 6 Ellipsengleichungen für die Hyperbel anwendbar zu machen. Hier stehen sie der Ordnung nach.

1) $$y^2 = \frac{p x (a + x)}{a}$$

2) $$y^2 = p x + \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

3) $$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

4) $$y^2 = \frac{p v^2}{a} - \frac{1}{4} a p$$

5) $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

6) $$y^2 = \frac{p^2 v^2}{c^2} - \frac{1}{4} c^2$$

§. 165. Zusatz. Denkt man sich die kleine Achse ebenfalls als Abscissenlinie zu beyden Seiten

fort-

fortgeführt, so würde sicher auch für die Mittelpunktsabscissen auf selber nach der Analogie die Gleichung gelten müssen $\Phi^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2} - \frac{1}{4} a^2$

§. 166. **Lehrsatz.** Eben so wenig als auf der großen Achse Ordinaten möglich sind, sind sie es auch auf der Querachse. Sie kann aber wohl am Ende beyderseits geschnitten werden, und auf ihrer Verlängerung Ordinaten verstatten.

Beweis.

Da die Gleichung $\Phi^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2} - \frac{1}{4} a^2$ vom Mittelpunkte die Abscissen anrechnet, so müßte, im Fall sich auf der Querachse Ordinaten befänden, die zugehörigen Abscissen kleiner als die Hälfte derselben seyn. Nehme man daher an z sey kleiner als $\frac{1}{2}$ c z. B. $z = \frac{c}{m}$ wo $m > 2$ ist, folglich $z^2 = \frac{a^2}{m^2}$ so verwandelt sich die Gleichung in folgende

$$\Phi^2 = \frac{a^2 c^2}{m^2 c^2} - \frac{1}{4} a^2$$

$$\Phi^2 = \frac{a^2}{m^2} - \frac{a^2}{4}$$

Man sieht beym ersten Anblick, daß unter dieser Bedingung nothwendig $\frac{a^2}{m^2} < \frac{a^2}{4}$ sey: daher wäre Φ^2 nach dem Abzuge einer negativen Größe gleich, welches aber wieder eine baare mathematische Chimäre ist. Es ist also ausgemacht, daß die Ordinaten auf der Querachse keinen Platz haben. Nimmt

man eine Abscisse auf der andern Hälfte jenseits der großen Achse, so ist, weil hier $z = -\frac{a}{m}$ und

$$z^2 = \frac{a^2}{m^2}$$ wie vorher, dieß eben so richtig. Das erste was zu erweisen war.

Setzt man zweytens $z = \frac{c}{2}$ oder $-\frac{c}{2}$ folglich $z^2 = \frac{c^2}{4}$, so gewinnt die Gleichung folgendes Ansehen

$$\phi^2 = \frac{a^2 c^2}{4 c^2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\phi^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$$

also $\phi = 0$; das heißt in der Sprache der Algebra, die Ordinate ist an den äußern Endpunkten der Querachse so klein, daß sie sammt der krumen Linie in die Achse selbst fällt, oder was auf eins hinaus läuft, daß die Achse hier überall geschnitten wird, was zweytens zu erweisen war.

Drittens endlich soll z größer als $\frac{c}{2}$ oder $-\frac{c}{2}$ werden, z. B. $\frac{mc}{2}$ oder $-\frac{mc}{2}$, wo $m > 1$ so erscheint die verwandelte Aequation, weil $z^2 = \frac{m^2 c^2}{4}$

$$\phi^2 = \frac{a^2 m^2 c^2}{4 c^2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\phi^2 = \frac{m^2 a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{(m^2 - 1) a^2}{4}$$

also $\phi = \frac{a}{2}\sqrt{m^2 - 1}$. Da nun die Wurzel aus $m^2 - 1$ allemal eine positive Größe ist, so

hat

hat die Ordinate einen wahren Werth. Es giebt demnach zu beyden Seiten auf der verlängerten kleinen Achse ebenfalls Ordinaten, wie auf der verlängerten großen Achse.

§. 167. Zusatz. Es lassen sich demnach bey jeder Hyperbel nicht blos 4, sondern 8 unendliche Aeste gedenken; denn es kann auch auf der Verlängerung der Querachse nirgends ein Maximum geben, wie dieß sogleich aus der differentierten Gleichung ersichtlich ist

$$2\Phi\,d\Phi = \frac{2a^2 z\,dz}{c^2}$$

$$:2 \qquad \Phi\,d\Phi = \frac{a^2 z\,dz}{c^2}$$

$$:\Phi \qquad d\Phi = \frac{a^2 z\,dz}{c^2\Phi}$$

$$:dz \qquad \frac{d\Phi}{dz} = \frac{a^2 z}{c^2\Phi}$$

oder

$$o = \frac{a^2 z}{c^2\Phi}$$

$$\times c^2\Phi \qquad o = a^2 z$$

$$:a^2 \qquad o = z.$$

Weil nun z vom Mittelpunkte aus niemals zu Null werden kann, so ist auch hier keine größte Ordinate möglich. Alles bishergesagte erhellet auch schon aus Fig. 38.

§. 168. Anmerk. Wenn wir wieder auf die ersten zwo ursprünglichen Hyperbeläquationen zurückkehren, so erinnern wir uns, daß weder die ganze noch die halbe Hauptachse eine Abscisse werden, und eben so wenig die halbe Querachse eine Ordinate abgeben könne. Indeß wird es jedem begreiflich scheinen, daß Abscissen und Ordinaten auf der Verlängerung der Hauptachse möglich sind, die genau obige Größe haben. Wir wollen diese Behauptung in zween Lehrsätzen vortragen.

§. 169.

§. 169. **Lehrsatz.** Jener Abscisse, die so groß ist als die halbe Hauptachse, entspricht als Ordinate die halbe kleine Achse, multipliciert durch die Quadratwurzel aus 3.

Voraussetzung.

$$x = \tfrac{1}{2} a$$

Satz

$$y = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3}$$

Beweis.

Es ist $y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$

subst. $y^2 = \frac{c^2 a}{2a} + \frac{c^2 a^2}{4a^2}$

abgek. $y^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{4}$

noch mehr $y^2 = \frac{3c^2}{4}$

$$y^2 = \tfrac{1}{2} c \sqrt{3}$$

§. 170. **Zusatz.** Ist $x = a$, so wird aus der Gleichung folgende

$$y^2 = \frac{c^2 a}{a} + \frac{c^2 a^2}{a^2}$$

$$y^2 = c^2 + c^2$$

$$y^2 = 2c^2$$

$$y = c\sqrt{2}$$

§. 171. **Lehrsatz.** Einer Ordinate, die so groß als die halbe Querachse ist, korrespondiert eine Mittel-

Mittelpunktsabscisse, die der Hauptachse gleicht, wenn sie durch die Wurzel aus 2 dividiert wird.

Voraussetzung.

$$y = \frac{1}{2} c$$

Satz.

$$v = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Beweis.

Es ist hier $\frac{1}{4} c^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$

$: c^2 \qquad \frac{1}{4} = \frac{v^2}{a^2} - \frac{1}{4}$

versetzt $\qquad \frac{1}{2} = \frac{v^2}{a^2}$

$\times a^2 \qquad \frac{a^2}{2} = v^2$

$$\sqrt{\frac{a^2}{2}} = v$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = v$$

§. 172. Lehrsatz. Der Brennpunkt in jeder Hyperbel ist, vom Mittelpunkt ausgerechnet, wie in der Ellipse, nur daß das Zeichen geändert vorkömmt.

Satz.

$$v = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

Beweis.

Beweis.

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

aber hier ist $y = \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2a}$ §. 73

quad. $$y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$$

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

$: c^2$ $$\frac{c^2}{4a^2} = \frac{v^2}{a^2} - \frac{1}{4}$$

$\times a^2$ $$\frac{c^2}{4} = v^2 - \frac{a^2}{4}$$

versetzt $$\frac{a^2 + c^2}{4} = v^2$$

$\surd$ $$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} = v$$

§. 173. Zusatz. Die übrigen gleichgültigen Ausdrücke für die Brennweite lassen sich eben so leicht nach den Regeln der Konversion bestimmen; wenn sie ehevor von der Ellipse entlehnt worden.

§. 174. Erkl. Jene Hyperbel, derer große und kleine Achse gleich sind, heißt eine gleichseitige Hyperbel.

§. 175. Zus. Die Gleichung $y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$

verändert sich demnach für die gleichseitige Hyperbel in diese $y^2 = \frac{a^2 x}{a} + \frac{a^2 x^2}{a^2}$

$y^2 = ax + x^2$, welche mit verkehrtem Zeichen die des Zirkels ist. §. 176.

§. 176. **Zusatz.** Die Brennweite ist daher in der gleichseitigen Hyperbel $\frac{\sqrt{2\,a^2}}{2} = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$

§. 177. **Aufgabe.** In jeder Hyperbel die Brennweite und den Parameter durch Zeichnung sinnlich zu machen.

Auflösung. Man trage die halbe Querachse rechtwinklicht auf den Endpunkt der Hauptachse und ziehe die Hypothenuse. Mit dieser Hypothenuse nun beschreibe man aus dem Mittelpunkte der Hauptachse einen Bogen durch die Hyperbel, so wird er gerade die Abscissenlinie im Brennpunkte schneiden. Denn ich erweise daß Fig. 39

$$cF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} \text{ sey.}$$

Beweis.

$$cg^2 = cb^2 + bg^2$$

Aber $cg = cF$, $cb = \frac{1}{2}a$ und $bg = \frac{1}{2}c$

folgl. $cF^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$

$\sqrt{}$ $cF = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$

Wird nun auf dem Brennpunkte eine Doppelordinate errichtet, so ist eben darum auch der Parameter der Hyperbel sichtbar.

§. 178. **Lehrsatz.** Die Differenz zweener Brennstrahlen, die in der Kurve einen Winkel machen, ist in jeder Hyperbel der Hauptachse gleich.

Satz 3. Fig. 40.

$$mf - mF = a$$

Beweis.

Wenn von jenem Punkt der Hyperbel, wo die beyden Brennstrahlen zusamm laufen, eine Ordinate ausgezogen wird, so ist

I $\quad fm^2 = fp^2 + pm^2$

aber $\quad fp = fa + ap$

$\quad$ oder $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} + v$

und $\quad fp^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 + c^2} + v^2$

so wie $\quad pm^2 = \frac{v^2 c^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

Nun subst. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2+c^2} + v^2 + \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

abgek. $\quad fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + v\sqrt{a^2 + c^2} + v^2 + \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$\surd \quad fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$

II Es ist auch eben so richtig, daß

$$Fm^2 = Fp^2 + pm^2$$

Allein $\quad Fp = ap - aF$

$\quad$ oder $= v - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$

Folgl. $\quad Fp^2 = v^2 - v\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$

Subst. $\quad Fm^2 = v^2 - v\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

abgek.

abgek. $Fm^2 = v^2 + c^2 v^2 / a^2 - v\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2$

$Fm = \frac{1}{2}a - \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$

oder auch $Fm = \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2} - \frac{1}{2}a$ nach der Würdenlehre.

Nun ist nach Nro I $fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$

Hier nach Nro II $Fm = -\frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c}$

\- \+ \-

$fm - Fm = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$

§. 179. **Aufgabe.** Eine Hyperbel zu zeichnen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe eine unbestimmte gerade Linie, schneide die Hauptachse davon ab, und bestimme zwo gleiche Brennweiten. Man nehme nun immer eine beträchtlich größere Zirkelöfnung als die Hauptachse ist, und beschreibe aus einem der Brennpunkte einen Bogen, und durchschneide ihn mit einer ersten Oefnung, welche ausdrückt, um wie viel die vorige größer als die Achse war, so wird der Durchschnittspunkt in der Hyperbel liegen; weil hier $fm - Fm = a$ seyn muß. Wiederholt man diese Methode mit andern Zirkelöfnungen dieser Art, so werden auch eben darum mehr Punkte von dieser Kurve bestimmt werden.

§. 180. **Aufgabe. Die Tangente der Hyperbel zu ziehen.**

Auflösung. Man ziehe auf jenen Punkt, wodurch die Tangente gehen soll, zween Brennstrahlen zusamm, und theile den Winkel, welchen sie mit einander bilden, in zween gleiche Theile, so wird

die Theilungslinie die verlangte Tangente seyn. Denn es liegt weder oberhalb noch unterhalb ein Punkt dieser Tangente mehr in der Kurve.

Beweis.

Man mache Fig. 41 d m = F m
folglich ist f d = f m — F m = a b
Es ist ferner F g = g d
g c = g c
und o = x
also △ F g c ≅ △ g c d und eben darum
F c = d c
Nun ist f c < f d + d c
subst. f c < a b + F c
— F c — F c
f c — F c < a b; daher c kein Punkt der Hyperbel.

Eben so wenig n; denn es läßt sich auf die nämliche Art erweisen, daß F n = d n
Nun ist aber f n < f d + d n
subst. f n < a b + F n
— F n — F n
f n — F n < a b, was zu erhärten war.

§. 181. Zusatz. Verlängert man einen der Brennstrahlen, so werden die Winkel, welche sie auf der Tangente gestalten, vollkommen einander gleich seyn; der Beweis ist gerade wie bey der Ellipse.

§. 182. Anmerk. Die Akustik und vorzüglich die Katoptrik weiß von der Hyperbel wegen der Gleichheit der Brennstrahlwinkel ebenfalls wichtigen Gebrauch zu machen. Die Sache setzt zu viele Theorie dieser physischen Artikel voraus, als daß wir uns diesorts hierüber näher erklären könnten.

§. 183.

§. 183. **Lehrsatz.** Es läßt sich nach aller geometrischer Strenge erweisen, daß die Assymtoten, obwohl sie immer den Hyperbeläsien näher und näher kommen, doch mit selben nie zusamm fallen. Denn wenn man von ein und dem nämlichen Punkte der Abscissenlinie sowohl auf die Hyperbelschenkel als auf die daranliegende Assymtote Ordinaten zieht, so giebt die Differenz dieser quadrierten Ordinaten in jedem Falle eine beständige Größe, nämlich den 4ten Theil des Quadrats der Querachse.

Satz.

$z^2 - y^2 = \frac{1}{4} c^2$, wo z die Ordinate auf die Assymtote vorstellet.

Beweis. Fig. 42

$$ca : da = cp : rp$$

subst. $\quad \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c = (x + \frac{1}{2}a) : z$

×2 $\quad a : c = (x + \frac{1}{2}a) : z$

$$az = cx + \frac{1}{2}ac$$

quad. $\quad a^2 z^2 = c^2 x^2 + a c^2 x + \frac{1}{4} a^2 c^2$

:a^2 $\quad z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{c^2 x}{a} + \frac{1}{4} c^2$

aber $\quad y^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{c^2 x}{a}$

— — —

$$z^2 - y^2 = \frac{1}{4} c^2$$

§. 184. **Zusatz.** Da dieß zu beyden Seiten der Hyperbel wahr ist, so folgt auch, daß die Differenzen dieser Ordinaten selbst beyderseits gleich sind; denn wenn

z^2

$z^2 - y^2 = \frac{1}{4}c^2$

so ist auch $Z^2 - Y^2 = \frac{1}{4}c^2$ von der andern Seite

also $z^2 - y^2 = Z^2 - Y^2$

aber $-y^2 = -Y^2$

$z^2 = Z^2$

$z = Z$

Da nun $y = Y$

$z - y = Z - Y$

§. 185. Zusatz. Weil ein solches Stück zwischen dem Hyperbelschenkel und der Assymtote durch $z - y$ und das übrige Stück der grossen Doppelordinate $2z$ durch $z + y$ ausgedrückt werden kann, so giebt auch das Produkt aus diesen zwoen Segmenten $z^2 - y^2$ mehrmals $\frac{1}{4}c^2$

§. 186. Erkl. Wenn mit den Assymtoten aus dem Scheitelpunkt der Hyperbel ein Parallelogram ergänzt wird, so heißt eine solche Seite die Potenz der Hyperbel.

§. 187. Lehrsatz. Die Potenz der Hyperbel ist gleich den 4ten Theil der Quadratwurzel aus der Summe der beyden quadrierten Achsen. Wenn daher b die Potenz ausdrückt, so heißt der

Satz.

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{4}$$

Beweis. Fig. 43.

$z = y$ wegen Parallelismus

$z = s$ wegen gleichschenklichten Δ

also $y = s$ und deßwegen gh

$$gh = dg = b$$

Ferner $r = m$

$o = m$

---

also $o = r$ und daher auch

$$fg = dg = b$$

Aber $fg + gh = fh$

subſtit. $b + b = \sqrt{a^2 + c^2}$

$$2b = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{4}$$

§. 188. **Lehrſatz.** Wenn von einem Punkt der Kurve auf die Aſſymtote eine Parallellinie mit der Potenz der Hyperbel gezogen, und für eine Ordinate $= \mu$, ſo wie das vom Mittelpunkt aus abgeſchnittne Stück der Aſſymtote ſelbſt für ihre Abſciſſe $= \zeta$ angenommen wird, ſo heißt die Gleichung zwiſchen der Hyperbel und den Aſſymtoten $b^2 = \mu\zeta$

Beweis. Fig. 44

Man ziehe von jenem Endpunkt einer ſolchen Ordinate, der in der Kurve liegt, eine Linie mit der nächſten Aſſymtote parallel, bis hin zur andern Aſſymtote und nenne einsweilen das Stück $z - y = m$ ſo iſt

I $qk : nq = cd : gd$

$m : \mu = \frac{1}{2}c : gd$

$m \times gd = \frac{c\mu}{2}$

gd

$$gd = \frac{c\,\mu}{2\,m}$$

aber $gd = b$

also $b = \frac{c\,\mu}{2\,m}$

und $b^2 = \frac{c^2\,\mu^2}{4\,m^2}$

Weil aber $(z - y)\,(z + y) = \frac{1}{4}c^2$ nach §. 185.

subſtit. $m \times qr = \frac{1}{4}c^2$

und $qr = \frac{c^2}{4\,m}$

ſo gilt in II c d : $gd = qr$: qf oder nh

die Subſt. $\frac{c}{2} : \frac{c\,\mu}{2m} = \frac{c^2}{4m} : \zeta$

$$\frac{c^3\,\mu}{8\,m^2} = \frac{c\,\zeta}{2}$$

$: c$ $\quad \frac{c^2\,\mu}{8\,m^2} = \frac{\zeta}{2}$

$\times 2$ $\quad \frac{c^2\,\mu}{4\,m^2} = \zeta$

$\times \mu$ $\quad \frac{c^2\,\mu^2}{4\,m^2} = \mu\zeta$

Allein es iſt $\frac{c^2\,\mu^2}{4\,m^2} = b^2$

Folglich $b^2 = \mu\zeta$

§. 189. **Aufgabe.** Eine gleichſeitige Hyperbel zu beſchreiben.

Auflöſung. Man ſetze zwo gerade Linien unter einen rechten Winkel zuſamm, beſtimme die Potenz, wenn ſie nicht etwa gegeben iſt, nach Will-

führ

führ verlängere zwo Seiten parallel mit den Assymtoten, und beschreibe etliche Halbkreise auf eben diese Assymtoten, die sich alle im rechten Winkel anfangen. Da nun, wo die Parallelen vom Kreise geschnitten worden, fälle man Perpendikel auf den Diameter herab, setze den Handzirkel auf dem Endpunkt des Perpendikels ein, und durchschneide selben mit dem kleinern Segment des Diameters, so wird ein solcher Durchschnittspunkt in der gleichseitigen Hyperbel liegen.

Beweis.

$$fg^2 = af \times fl$$

Aber $fg = aq = b$

$af = \zeta$

und $fl = fm = \mu$

Substit. $b^2 = \zeta\mu$. Folglich, weil dieß auch bey kn, und andern Ordinaten statt hat, ist die Hyperbel zwischen den Assymtoten richtig beschrieben. Daß sie aber gleichseitig sey, rühret daher, weil der rechte Winkel a durch die Achse in zween gleiche Theil getheilt worden, wo demnach $o = x = 45°$ folglich das rechtwinklichte Dreyeck afb gleichschenklicht seyn muß, das heißt, nothwendig $bf = ab$ oder $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a$ ist.

§. 190. **Aufgabe.** Die Tangente, Subtangente, Normal und Subnormal bey der Hyperbel zu bestimmen.

Auflösung. Es wäre überflüßig uns hier wiederum den mühsamen Rechnungen zu unterziehen. Sie sind die nämlichen, wie bey der Ellipse, wenn man ausnimmt, daß die Minuszeichen zuvor überall in Pluszeichen verwandelt werden müssen, im Fall die

Achsengleichung $y^2 = \frac{a\,c^2\,x + c^2\,x^2}{a^2}$ auch hier zum Grunde gelegt wird. Es ist diesem zufolge

1) $T. = \frac{\sqrt{(ax+x^2)(a^2c^2+4x(a^3+a^2x+ac^2+c^2x))}}{a\,(a+2x)}$

2) $Subt. = \frac{2\,x\,(a+x)}{a+2x}$

3) $Norm. = \frac{\sqrt{a^2c^2+4x(a^3c+c^2a^2x+ac^3+c^4x}}{2\,a^2}$

4) $Subnorm. = \frac{c^2\,(a+2x)}{2\,a^2}$

§. 191. **Zusatz.** Setzt man in diesen Formeln $c = a$, so erhält man selbe für die gleichseitige

1) $Tang. = \frac{\sqrt{(ax+x^2)(a^4+4x(a^3+a^2x+a^3+a^2x))}}{a\,(a+2x)}$

$= a\sqrt{\frac{(ax+x^2)\,(a^2+4x(a+x+a+x))}{a\,(a+2x)}}$

$= \sqrt{\frac{(ax+x^2)\,(a^2+4x(2a+2x)}{a+2x}}$

2) $Norm. = \frac{\sqrt{a^4+4x\,(a^4+a^4x+a^4+a^4x)}}{2\,a^2}$

$= 2\,a^2\sqrt{\frac{\frac{1}{4}+x(1+x+1+x)}{2\,a^2}}$

$= \sqrt{2\,x^2+2x+\frac{1}{4}}$

3) $Subnorm. = \frac{a^2\,(a+2x)}{2\,a^2}$

$= \frac{a+2x}{2}$

$= x+\frac{1}{2}a$

§. 192. **Aufgabe.** Eine Hyperbel rektificieren.

Auflösung. Nehmen wir die Gleichung der Mittelpunktsabscissen vor uns, so geht die Arbeit doch Anfangs einigermassen parallel mit der Rektifikation der Ellipse.

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

diff. $$2 y dy = \frac{2 c^2 v dv}{a^2}$$

$$: 2 \qquad y dy = \frac{c^2 v dv}{a^2}$$

quad. $$y^2 dy^2 = \frac{c^4 v^2 dv^2}{a^4}$$

div. durch $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2 = \frac{4 c^2 v^2 - a^2 c^2}{4 a^2}$$

$$dy^2 = \frac{c^4 v^2 dv^2}{a^4} \times \frac{4 a^2}{4 c^2 v^2 - a^2 c^2} = \frac{4 a^2 c^4 v^2 dv^2}{4 a^4 c^2 v^2 - a^6 c^2}$$

und

den Bruch verkl. $dy^2 = \frac{4c^2v^2dv^2}{4a^2v^2 - a^4}$

$$\frac{+dv^2 \qquad +dv^2}{dy^2 + dv^2 = \frac{4c^2v^2dv^2}{4a^2v^2 - a^4} + dv^2}$$

$$= \frac{4c^2v^2dv^2 + 4a^2v^2dv^2 - a^4dv^2}{4a^2v^2 - a^4}$$

$$= \frac{dv^2}{a^2}\left(\frac{4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}\right)$$

$$\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{4(a^2 + c^2)v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}}$$

Setzt man hier mehrmals $4(a^2 + c^2) = m$, so entsteht

$$\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{mv^2 - a^4}{4v^2 - a^2}} \text{ oder } = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - mv^2}{a^2 - 4v^2}}$$

Setzt

Weil aber nach §. 126 $\sqrt{a^4 - m v^2} = a^2 - \frac{m v^2}{2 a^2} - \frac{m^2 v^4}{8 a^6} - \frac{m^3 v^6}{16 a^{10}} \ldots$

Und $\sqrt{a^2 - 4 v^2} = a - \frac{2 v^2}{a} - \frac{2 v^4}{a^3} - \frac{4 v^6}{a^5}$

so läßt sich noch vor der Division statt

$m = 4 a^2 + 4 c^2$

$m^2 = 16 a^4 + 32 a^2 c^2 + 16 c^4$

und $m^3 = 64 a^6 + 192 a^4 c^2 + 192 a^2 c^4 + 64 c^4$ im Zähler substituieren.

Man bekömmt nach der Abkürzung zum Dividend:

$$a^2 - 2 v^2 - \frac{2 c^2 v^2}{a^2} - \frac{2 v^2}{2 a^2} - \frac{4 c^2 v^4}{a^4} - \frac{2 c^4 v^4}{a^6} - \frac{4 v^6}{a^4} - \frac{12 c^2 v^6}{a^6} - \frac{12 c^4 v^6}{a^8} \ldots$$

Der Quotus hingegen selbst ist

$$a - \frac{2 c^2 v^2}{a^3} - \frac{8 c^2 v^4}{a^5} + \frac{2 c^4 v^4}{a^7} \ldots$$

Deßwegen $\sqrt{dv^2 + dy^2} = \frac{dv}{a}\left(a - \frac{2 c^2 v^2}{a^3} - \frac{8 c^2 v^4}{a^5} + \frac{2 c^4 v^4}{a^7} \ldots\right)$

$$= dv - \frac{2 c^2 v^2 dv}{a^4} - \frac{8 c^2 v^4 dv}{a^6} + \frac{2 c^4 v^4 dv}{a^8} \ldots$$

$$S\left(\sqrt{dv^2+dy^2}\right) = v - \frac{2c^2v^3}{3a^4} - \frac{8c^2v^5}{5a^6} + \frac{2c^4v^5}{5a^8}$$

$$\text{oder} = v - \frac{2c^2v^3}{3a^4} + \left(\frac{2c^4-8a^2c^2}{5a^8}\right)v^5 \ldots\ldots$$

§. 193. Zusatz. Ist die Hyperbel gleichseitig, das heißt, wird $c = a$, so giebt die Reihe $= v - \frac{2a^2v^3}{3a^4} + \frac{(2a^4-8a^4)v^5}{5a^8} \ldots\ldots$

$$\text{abgek.} = v - \frac{2v^3}{3a^2} - \frac{6v^5}{5a^4} \ldots\ldots$$

Woraus man offenbar sieht, daß diese Reihe bey großen Hyperbelbögen nicht gebraucht werden kann; denn weil in solchen Fällen $v > a$, so müssen die hintern Glieder immer größer und größer werden, und lassen sich am Ende gar nicht mehr vom ersten positiven Gliede abziehen. Es ist daher besser, wenn man die Fraktion $\frac{mv^2-a^4}{4v^2-a^2}$ ungeändert läßt, und so in dieser Gestalt aus Zähler und Nenner die Wurzel zieht.

Es ist aber $(mv^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} = (mv^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(mv^2)^{-\frac{1}{2}} \times -a^4 + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2}(mv^2)^{-\frac{3}{2}} \times +a^8 +$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3}(mv^2)^{-\frac{5}{2}} \times -a^{12} \ldots$$

Abgek. $= m^{\frac{1}{2}}v - \frac{a^4}{2m^{\frac{1}{2}}v} - \frac{a^8}{8m^{\frac{3}{2}}v^3} - \frac{a^{12}}{16m^{\frac{5}{2}}v^5} \ldots\ldots$

Ferner ist $(4v^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = (4v^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(4v^2)^{-\frac{1}{2}} \times -a^2 + \frac{\frac{1}{2} + -\frac{1}{2}}{1 \times 2}(4v^2)^{-\frac{3}{2}} \times +a^4 +$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3}(4v^2)^{-\frac{5}{2}} \times -a^6 \ldots$$

Abgek. $2v - \frac{a^2}{2 \times 4^{\frac{1}{2}}v} - \frac{a^4}{8 \times 4^{\frac{3}{2}}v^3} - \frac{a^6}{16 \times 4^{\frac{5}{2}}v^5} \ldots\ldots$

Noch mehr, giebt $2v - \frac{a^2}{4v} - \frac{a^4}{64v^3} - \frac{a^6}{512v^5} \ldots$

Der Quotus davon ist: $\frac{m^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^{\frac{1}{2}} a^2}{16 v^2} + \frac{3 m^{\frac{1}{2}} a^4}{256 v^4} + \frac{5 m^{\frac{1}{2}} a^5}{2048 v^6} \ldots$

$$- \frac{a^4}{4 m^{\frac{1}{2}} v^2} - \frac{a^6}{32 m^{\frac{1}{2}} v^4} \ldots$$

Diese Reihe durch $\frac{dv}{a}$ multipliciert, so erscheint die obige Gleichung wieder in andern Ausdrücken

$$\sqrt{dv^2 + dy^2} = \frac{m^{\frac{1}{2}} dv}{2a} + \frac{m^{\frac{1}{2}} a^2 dv}{16 a v^2} - \frac{a^4 dv}{4 m^{\frac{1}{2}} a v^2} + \frac{3 m^{\frac{1}{2}} a^4 dv}{256 a v^4} - \frac{a^6 dv}{32 m^{\frac{1}{2}} a v^4}$$

$$+ \frac{5 m^{\frac{1}{2}} a^6 dv}{2048 m^{\frac{1}{2}} a v^6} \ldots$$

abgekürzt, und anderst ausgedrückt, giebt

Folgl. $\frac{m^{\frac{1}{2}} dv}{2a} + \frac{m^{\frac{1}{2}} a v^{-2} dv}{16} - \frac{a^3 v^{-2} dv}{4 m^{\frac{1}{2}}} + \frac{3 m^{\frac{1}{2}} a^3 v^{-4} dv}{256} - \frac{a^5 v^{-4} dv}{32 m^{\frac{1}{2}}} + \frac{5 m^{\frac{1}{2}} a^5 v^{-6} dv}{2048} \ldots$

Folgl. $S(\sqrt{dy^2+dv^2}) = \frac{m^{\frac{1}{2}}v}{2a} + \frac{m^{\frac{1}{2}}a\,v^{-1}}{-16} - \frac{a^3v^{-1}}{-4m^{\frac{1}{2}}} + \frac{3m^{\frac{1}{2}}a^3v^{-3}}{-3\times256}$

$$- \frac{a^5v^{-3}}{-3\times32\,m^{\frac{1}{2}}} + \frac{5m^{\frac{1}{2}}a^5v^{-5}}{-5\times2048} \ldots.$$

Abgek. $= \frac{m^{\frac{1}{2}}v}{2a} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a}{16v} + \frac{a^3}{4m^{\frac{1}{2}}v} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a^3}{256v^3} + \frac{a^5}{96\,m^{\frac{1}{2}}v^3} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a^5}{2048\,v^5} \ldots.$

Weil nun $m = 4(a^2+c^2)$, und $m^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a^2+c^2}$ ist, so kann überall in der Reihe substituiert werden; und ein rektificierter Hyperbelast wird demnach seyn:

$$\frac{v\sqrt{a^2+c^2}}{a} - \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{8v} + \frac{a^3}{8v\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{a^3\sqrt{a^2+c^2}}{128\,v^3} + \frac{a^5}{192\,v^3\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$- \frac{a^5\sqrt{a^2+c^2}}{1024\,v^5} \ldots.$$

§. 194. Zusatz. Dieser Formel zufolge, wäre der Ausdruck für die gleichseitige Hyperbel, weil $\sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, folgender:

$$\frac{av\sqrt{2}}{a} - \frac{a^2\sqrt{2}}{8v} + \frac{a^3}{8av\sqrt{2}} - \frac{a^4\sqrt{2}}{128v^3} + \frac{a^5}{192av^3\sqrt{2}} - \frac{a^6\sqrt{2}}{1024v^5} \cdots$$

und abgek. $= v\sqrt{2} - \frac{a^2\sqrt{2}}{8v} + \frac{a^2}{8v\sqrt{2}} - \frac{a^4\sqrt{2}}{128v^3} + \frac{a^4}{192v^3\sqrt{2}} - \frac{a^6\sqrt{2}}{1024v^5} \cdots$

oder auch $v\sqrt{2} + \left(\frac{a^2}{8v} + \frac{a^4}{192v^3} \cdots\right) : \sqrt{2} - \left(\frac{a^2}{8v} + \frac{a^4}{128v^3} \cdots\right) \times \sqrt{2}.$

§. 195. **Anmerk.** Ein Exempel hierüber zur Versinnlichung. Vor einem Sommerpallaste soll zu beyden Seiten eine Baumallee in Form einer gleichseitigen Hyperbel angelegt werden, dessen Hauptachse 120′ beträgt; wie viel hat man Bäume nöthig, wenn sie in der äußern Reihe 12 Schuh von einander entfernt werden. und ihre senkrechte Länge d. i. die Abscisse 80 Fuß gerechnet werden darf?

Auflösung. Da bey jeder Allee die Seitenreihen gleich viele Bäume haben, so suche man den äußersten Hyperbelschenkel in Schuhen, dividiere ihn durch 12 und nehme den Quotus viermal; oder was eines ist, man dividiere den gefundnen Schenkel durch drey, so erhält man die verlangte Anzahl von Bäumen.

Holz.

Es ist hier $v = \frac{120}{2} + 80 = 60 + 80 = 140$

Folglich die Reihe

$$= 140\sqrt{2} + \left(\frac{120^2}{8\times 140} + \frac{120^4}{192\times 140^3}\right) : \sqrt{2} - \left(\frac{120^2}{8\times 140} + \frac{120^4}{128\times 140^3}\right)\times\sqrt{2}$$

$$= 140\times 1{,}414 + \left(\frac{14400}{1120} + \frac{207360000}{526848000}\right) : \sqrt{2}\left(\frac{14400}{11200} + \text{u. s. f.}\right.$$

= 198 Schuhe ungefähr, weil die zwo letzten eingeklammerten Glieder fast kaum jede eine Einheit beträgt, und daher angesehen werden dörfen, als wenn sie sich völlig einander aufheben. Nun giebt 198 : 3 = 66 Bäume für die ganze Allee.

§. 196. **Anmerk.** Die Quadratur der Hyperbel, so wie die Bestimmung der Oberfläche eines hyperbolischen Afterkegels muß hier wegen den logarithmischen Differentialien, die sich mit in die Reihen mengen, bis auf tiefer unten verschoben werden, wo ohnehin die Logistik, von der wir oben in der Parabel §. 40 Meldung thaten, in Kürze abgehandelt werden soll. Wir wollen demnach den Artikel von der Hyperbel mit der Kubatur des dahin gehörigen Kegels einsweilen schließen.

§. 197. **Aufgabe.** Jene Körper, die durch Umwälzung einer Hyperbel erzeugt werden, zu kubieren.

Auflösung. Wie wir bey der Elliptoide uns der Aequation $y^2 = c^2 x - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ bedienten, so nehmen wir auch hier wieder ihre gleichförmige vor uns.

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times \pi dx \quad \pi y^2 dx = \pi \left(\frac{c^2 x dx}{a} + \frac{c^2 x^2 dx}{a^2} \right)$$

$$\int \pi y^2 dx = \pi \left(\frac{c^2 x^2}{2a} + \frac{c^2 x^3}{3a^2} \right)$$

$$\text{oder} = \pi \left(\frac{3ac^2 x^2 + 2c^2 x^3}{6a^2} \right) = \frac{\pi c^2 x^2}{6a^2} (3a + 2x)$$

§. 198. **Zusatz.** Sähe man etwa gerne, daß sich statt der kleinen Achse lieber die Ordinate in der Formel befände, so suche man einen Werth für c^2 aus der Gleichung folgender Gestalt

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2} = \frac{ac^2 x + c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times a^2 \quad a^2 y^2 = ac^2 x + c^2 x^2 = c^2 (ax + x^2)$$

$$\frac{a^2 y^2}{ax + x^2} = c^2$$

Diesen Ausdruck nun statt c^2 substituiert, giebt

$$\text{Solid.} = \frac{\pi a^2 y^2 x^2}{6a^2 (ax + x^2)} (3a + 2x).$$

$$= \frac{\pi y^2 x^2}{6(ax + x^2)} (3a + 2x) = \frac{\pi y^2 x (3a + 2x)}{6(a + x)}$$

§. 199. **Zusatz.** Ist die Rede von einer gleichseitigen Hyperbel, so verwandelt sich der erste Ausdruck in $\frac{\pi x^2}{6} (3a + 2x)$ und der andere, oder

$\frac{\pi y^2 x^2}{6 (ax + x^2)} \times (3a + 2x)$, weil $y^2 = ax + x^2$,

in diesen $\frac{\pi x (ax + x^2)}{6(a + x)} (3a + 2x) = \frac{\pi x^2 (3a + 2x)}{6}$

§. 200.

§. 200. **Anmerk.** Da fast jede Speiseschüssel eine Hyperboloide vorstellt, so kann auch der Inhalt einer darinn befindlichen Masse so ziemlich berechnet werden. Es geschah einst auf einem meteorologischen Observatorium, daß man, weil das eigentliche Behältniß zu Grunde gegangen war, ein schüsselförmiges Gefäß dem Regen aussetzen mußte. Beym Ende desselben fand sich, daß das Wasser in selbem 6 Zoll hoch stand. Wenn nun dieß eine gleichseitige Hyperboloide ist, deren Achse 10 Zoll hat, und die oberste Randesweite 20 Zoll beträgt, wie hoch darf diesmal das Regenwasser in die Ephemeriden eingetragen werden?

Auflösung. Man finde zuerst den kubischen Inhalt, und verwandle ihn in einen Zylinder, dessen Basis 20 Zoll zum Diameter hat, so ist eben darum die Höhe des Wassers auf jenem Platze gefunden, auf welchen es eigentlich geregnet hatte.

Also $\frac{3{,}14 \times 6^2 (3 \times 20 + 2 \times 6)}{6} = 3{,}14 \times 6 (60 + 12)$

$= 3{,}14 \times 6 \times 72 = 1356{,}48$ Zoll.

Weil nun die Randesfläche $\frac{20^2 \times 314}{4}$ ist, so gilt die Gleichung für den Wasserzylinder, dessen Höhe unbekannt ist

$$\frac{20^2 \times 3{,}14\, x}{4} = 1356{,}48$$

$$100 \times 3{,}14\, x = 1356{,}48$$

$$3{,}14\, x = 1356{,}48$$

$$x = \frac{1356{,}48}{314} = 4{,}32 \text{ Zoll Höhe.}$$

Von der Logistik, oder der logarithmischen Linie.

§. 201. **Erkl.** Wenn eine gerade Linie von unbestimmter Länge irgendwo gezogen und in gleiche

Theile

Theile eingetheilet wird; wenn ferner auf den Abtheilungspunkten Perpendikl errichtet werden, deren Länge in geometrischer Proportion zunehmen, und wenn man endlich durch die Endpunkte dieser Ordinaten eine Linie führt, so heißt eine solche Linie Logistik oder logarithmische Linie.

§. 202. Zusatz. Da die Abscissen fortgehen, wie 1, 2, 3 u. s. f. Die Ordinaten hingegen wie 1, 2, 4, 8; oder wie 1, 3, 9 u. d. gl. so ist es ausgemacht daß jede Abscisse der Logarithm ihrer Ordinate sey.

§. 203. Zusatz. Weil zwischen einer geometrischen und arithmetischen Proportion sich nicht wohl eine Gleichung in endlichen Größen anstellen läßt, so muß die Zuflucht zum Unendlichkleinen d. i. zu den Differentialen genommen werden.

§. 204. Lehrsatz. Zieht man zu zwo Ordinaten zwo gleich weit entfernte unendlich nahe Parallelinien, so verhalten sich die Differentialen dieser Ordinaten, wie die Ordinaten selbst.

Beweis.

$$MP : mp = NQ : nq \quad \text{oder}$$
$$\text{aber} \quad MP : (mp - MP) = NQ : (nq - NQ)$$
$$\text{oder} \quad y : dy = Y : dY$$

§. 205. Zusatz. Indem jedes Verhältniß durch Zuziehung einer beständigen Größe, wie wir es bey den Kegelschnitten erfuhren, in eine Gleichung verwandelt werden kann, so wird, wenn die beständige Größe $= p$, und die neue Funktion das Differential der Abscisse $= dx$, die Gleichung so heissen müssen.

$$y : dy = p : dx$$
$$y = \frac{p\,dy}{dx}$$

§. 206. **Lehrsatz.** Der Parameter der Logistik ist gleich ihrer Subtangente.

Satz.

p = Subtang.

Beweis.

$$\frac{\cdot}{-}y = \frac{p\,dy}{dx}$$

$$x\,dx \quad y\,dx = p\,dy$$

$$:dy \quad \frac{y\,dx}{dy} = p$$

aber $\frac{y\,dx}{dy}$ = Subtang.

p = Subtang.

§. 207. **Zusatz.** Es ist also die Subtangente der Logistik für jeden Punkt derselben beständig, so wie die Subnormal der Parabel.

§. 208. **Zusatz.** Nimmt man die Subtangente, oder den Parameter = 1 an, so wird

$$\frac{y\,dx}{dy} = 1$$

$$y\,dx = dy$$

$$dx = \frac{dy}{y} = y^{-1}\,dy$$

Folg.

Folglich ist das Differential, welches die Urgröße mit einer negativen Einheitpotenz vor sich hat, dem Abscissendifferential der Logistik gleich. Da nun dx als Differential der Abscisse zugehört, und die Abscisse der Logarithm ihrer Ordinate ist, so muß $S(y^{-1}dy)$ oder $S\left(\frac{dy}{y}\right) = x = \text{Log. } y$ seyn.

Denn würde man einen solchen Ausdruck nach den gemeinen Regeln integrieren, so gäbe er etwas Unendliches, welches verräth, daß man anders zu verfahren habe. Indeß ist dieß doch nichts weniger als ein Ausnahm in der Mathematik. $\frac{x^0}{0}$ ist eine beständige Größe; folglich hat sie kein Differential: demohngeachtet nimmt selbe obige Gestalt an, wenn sie differentiert wird; weil $\frac{0 \times x^{-1} \times dx}{0} = x^{-1}dx$ ist, daher kann $S(x^{-1}dx)$ nicht eigentlich dem $\frac{x^0}{0}$ gleich seyn, und muß zu andern Regeln die Zuflucht genommen werden.

§. 209. **Aufgabe.** Man soll den Werth von x oder von $S(y^{-1}dy) = \text{Log. } y$ bestimmen, das heißt, den natürlichen Logarithm für jede Zahl finden.

Auflösung. Setze man I $y = 1 - z$, so ist

$$dy = -dz$$

div. durch $y = 1 - z$

$$y^{-1}dy = \frac{-dz}{1-z} = -dz - zdz - z^2dz - z^3dz \ldots$$

$$S(y^{-1}\,dy) = -z + \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$$

aber $S(y^{-1}\,dy) = \text{Log. } y = \text{Log. } (1-z)$

$$\text{Log}(1-z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$$

Es sey $y = 1+z$

folglich $dy = dz$

wieder div. durch $y = 1+z$

$$y^{-1}\,dy = \frac{dz}{1+z} = dz - z\,dz + z^2\,dz - z^3\,dz \ldots.$$

und $S(y^{-1}\,dy) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$

allein $S(y^{-1}\,dy) = \text{Log. } y = L(1+z)$

Also $\text{Log. } (1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.$

und Nro I $\text{Log. } (1-z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.$

$+ \quad + \quad + \quad +$

$$\text{Log. } (1+z) - \text{Log. } (1-z) = L\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z + \tfrac{2}{3}z^3 - \tfrac{2}{5}z^5 \ldots.$$

oder $= 2\left(z + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.\right)$

Setzt man z. B. $z = \tfrac{1}{5}$, so ist $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{6}{5} : \frac{4}{5} = 6 : 4 = \frac{3}{2}$

Ist hingegen $z = \frac{1}{7}$, so wird $\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{8}{7} : \frac{6}{7} = 8 : 6 = \frac{4}{3}$

Nun ist Log. $\frac{3}{2}$ + Log. $\frac{4}{3}$ = Log. $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$ = Log. $\frac{12}{6}$ = Log. 2.
Es dürfen demnach nur die Logarithm von $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$ nach der obigen Reihe bestimmt werden, so muß ihre Summe der natürliche Logarithm von der Zahl 2 seyn.

$$\text{Log. } \tfrac{3}{2} = 2\left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{5}\right)^3 + \tfrac{1}{5} \times \left(\tfrac{1}{5}\right)^5 \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \times 125} + \frac{1}{15625} \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{75}{375} + \frac{1}{375} + \frac{1}{15625} \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{77}{375} + \frac{1}{15625} \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1203125 + 375}{5859375} \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1202750}{5859375} \ldots\right) = \frac{2405500}{5859375} = 0{,}41$$

Ferner $\text{Log.}\frac{4}{3} = 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{7}\right)^3 \ldots\right)$

$= 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{1029} \ldots\right)$

$= 2\left(\frac{147+1}{7029}\right) = 2\left(\frac{148}{1029}\right) = \frac{296}{1029} = 0{,}2876$

Folglich $\text{Log. } 2 = \text{Log.}\frac{3}{2} + \text{Log.}\frac{4}{3} = 0{,}41 + 0{,}28 = 0{,}69$

§. 209. Anmerk. Wollte man diesen Logarithm mit mehr Decimalen berechnet wissen, so dörfte nur die Reihe etwas länger fortgeführt, und die Division durch einen größern Quotus verfolgt werden. Uebrigens ist die Arbeit, natürliche Logarithmen zu finden, ungleich leichter als die Berechnung der dekadischen des Briggs.

§. 210. Anmerk. Hr. Wolfram, Artillerielieutenant in den vereinigten Niederlanden wiedmete ganzer sechs Jahre der Berechnung dieser natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, und machte sich daher um die höhere Mathematik höchst verdient, weil diese Logarithmen vorzüglich gute Dienste bey schwerern Integrationen leisten. Sie wurden Schulzens neuer und erweiterter Sammlung logarithmischer u. a. Tafeln einverleibt, und sind von 1 bis 2200 für alle Zahlen in 40 Decimalen berechnet: von da fort bis 10000 findet sie sich aber nur mehr für die Prim- und andere stark kombinierte Zahlen vor; weil sich die übrigen leicht durch Addieren ersetzen lassen. Die natürlichen Logarithmen halten das Mittel zwischen allen künstlichen, die was immer für eine geometrische Proportion zur Basis haben, und deßwegen heißen sie auch, denke ich, natürlich. Hyperbolisch nennt man sie aus der Ursache, weil die Hyperbel zwischen den Asymtoten ebenfalls diese Logarithmen zu finden dient, und durch Hilfe derselben quadriert werden kann.

Oben genannter Schulze rückte auch eine kurze Anleitung ein, jeden briggischen Logarithm in einen hyperbolischen zu verwandeln: ich will sie, um sich im Benöthigungsfalle helfen zu können, ganz hieher setzen. Man braucht hierzu die kleine Tabelle, wo für jedes Ziffer eines dekadischen Logarithms eine solche Zahl gesetzt werden muß.

1	2,302585
2	4,605170
3	6,907755
4	9,210340
5	11,512925
6	13,815510
7	16,118095
8	18,420680
9	20,723265

Folgendes Beyspiel soll die ganze Verfahrungsart sattsam aufklären. Es sey der dekadische Logarithm von 1987 = 3,2981979 gegeben, so verwandelt er sich auf diese Art in einen hyperbolischen:

3,2981979

statt 3 . . . 6,9077553
2 4605170
9 2072326
8 184206
1 2302
9 2072
7 161
9 20

7,5943810 der natürliche Logarithm von der Zahl 1987, wo bloß das letzte Ziffer 0 gefehlt ist und 4 heißen soll; daher können manchmal die Ziffer am Ende um 1 verstärkt werden; vorzüglich wenn die nächstfolgenden sehr groß sind und im Anschreiben weggelassen werden müssen.

§. 211. **Aufgabe.** Die Hyperbel durch Hilfe des logarithmischen Differenzials quadrieren.

Auflösung. Es ist bey jeder Hyperbel

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2 = \frac{4c^2v^2 - c^2a^2}{4a^2} = \frac{c^2}{4a^2}(4v^2 - a^2)$$

$$y = \frac{c}{2a}\sqrt{4v^2 - a^2}$$

X d v $\quad y\,dv = \frac{c\,dv}{2a}\sqrt{4v^2 - a^2}$

Es ist aber $\sqrt{4v^2 - a^2} = 2v - \frac{a^2}{4v} - \frac{a^4}{64v^3} - \frac{a^6}{512v^5} \cdots$

Folglich subst. $\quad y\,dv = \frac{c\,dv}{2a}\left(2v - \frac{a^2}{4v} - \frac{a^4}{64v^3} - \frac{a^6}{512v^5} \cdots\right)$

$$= \frac{cv\,dv}{a} - \frac{ca\,v^{-1}\,dv}{8} - \frac{ca^3v^{-3}}{128} - \frac{ca^5v^{-5}}{1024} \cdots$$

$$S(y\,dv) = \frac{cv^2}{2a} - \frac{ca\,Log.\,v}{8} + \frac{ca^3v^{-2}}{256} + \frac{ca^5v^{-4}}{4096} \cdots$$

oder $= \frac{c v^2}{2a} - \frac{c a \, Log. v}{8} + \frac{c a^3}{256 v^2} + \frac{c a^5}{4096 v^4} \ldots$

Also die ganze Hyp. $= \frac{c v^2}{a} - \frac{c a \, Log. v}{4} + \frac{c a^3}{128 v^2} + \frac{c a^5}{2048 v^4} \ldots$

§. 212. Zusatz. Ist die Hyperbel gleichseitig, so metamorphosiert sich die Reihe in folgende

$$\text{Quad. Hyp.} = v^2 - \frac{a^2 \, Log. v}{4} + \frac{a^4}{128 v^2} + \frac{a^6}{2048 v^4}$$

§. 213. **Anmerk.** Wenn das obige Exempel §. 195 eine andere Wendung erhält, so haben wir folgende Aufgabe vor uns liegen. Es dörfen nur die äußern Baumreihen der beyden hyperbelförmigen Seitenalleen bleiben, der übrige Platz soll dazwischen mit Rasenstücken belegt werden; wie viel hat man Quadratfuß dazu nöthig?

Auflösung. Weil bey dieser gleichseitigen Hyperbel jede Achse 120, und die Abscisse 80 Schuh hält, so ist, indem $v = \frac{120}{2} + 80 = 60 + 80 = 140$ beträgt, der Quadratinhalt folgende Reihe

$$140^2 - \frac{120^2 \times 2,146128}{4} + \frac{120^4}{128 \times 140^2} + \frac{120^6}{2048 \times 140^4} \ldots$$

Die positiven Glieder geben ohngefähr bey der Berechnung $140^2 = 19600$

$$\frac{120^4}{128 \times 140^2} = 84$$

$$\frac{120^6}{2048 \times 140^4} = 4$$

19688. Das negative Glied

$$\frac{120^2 \times 146128}{4} = 7726$$

11962 Quadratschuhe.

§. 214. **Anmerk.** Die Hyperbel wurde hier ohne Zuziehung der Assymtoten quadriert, folglich dorften auch die hyperbolischen Logarithmen nicht gebraucht werden, sondern die dekadischen, weil sie übrigens mit unsern Zahlensystem am besten harmonieren. Hätte man sich des hyperbolischen Logarithms von 140, welcher 4,94164 ist, bedient, so würden hier am Ende nur 1898 Füße herausgekommen seyn, welches offenbar zu wenig wäre; denn sucht man hier aus der Gleichung $y^2 = ax + x^2$ den Werth der Ordinate, so erhält man dafür 128 Schuhe, dieß nun mit der Abscisse 80 multipliciert, giebt 10240 Quadratfuß, das ganze Dreyeck, wovon die Doppelordinate die Grundlinie, und die Abscisse die Höhe ist; weil aber die Hyperbelfläche größer seyn muß, als dieses Dreyeck; indem sich die Kurve zu beyden Seiten darüber hinausschwingt, so wäre das Resultat mit hyperbolischen Logarithmen viel zu wenig. Es folgt also schon aus diesem einzigen Beyspiel, daß man in solchen Fällen zu den gemeinen Logarithmen die Zuflucht zu nehmen habe. Ich würde vielleicht zu weitläuftig seyn, wenn ich hier auch die Methode zeigte, die Hyperbel durch Hilfe der Assymtoten zu quadrieren.

§. 215. **Anmerk.** Ueberhaupt sind die Mathematiker in Behandlung der logarithmischen Differentialien noch nicht ganz einig. Die allermeisten schweigen, in soweit es dabey auf die Anwendung ankömmt, gänzlich. Abel Burja, der in diesen Stück sehr tief eindringt, und den großen Analysten Kästnern, Eulern u. d. gl. glücklich nachdenkt, drückt sich am Ende so aus. „Die Integralrechnung ist bis daher „noch keine vollständige Kunst; sondern sie besteht meistens in „mehr oder weniger Versuchen, welche verschiedne große Mathematiker gemacht haben, um die dahin einschlagenden Aufgaben aufzulösen.“ Die Sache setzt zu viele und manigfaltige Kenntnisse der Exponentialrechnung, der unendlichen Reihen und der Funktionen voraus, welche wir hier wegen den engen Raum nicht abhandeln können.

§. 216.

§. 216. **Aufgabe.** Die Oberfläche eines hyperbolischen Afterkegels bestimmen.

Auflösung. $2ydy = \frac{2c^2vdv}{a^2}$

quad. $4y^2dy^2 = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4}$

$+4y^2dv^2 = +4y^2dv^2$

$4y^2dy^2 + 4y^2dv^2 = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4} + 4y^2dv^2$

oder $4y^2(dy^2 + dv^2) = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4} + 4dv^2\left(\frac{c^2v^2}{a^4} - \frac{1}{4}c^2\right)$

$= \frac{c^2dv^2}{a^4}(4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4)$

$2y\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{cdv}{a^2}\sqrt{4(a^2+c^2)v^2 - a^4}$

Und ist wieder $4(a^2+c^2) = m$ so kömmt

$2y\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{cdv}{a^2}\sqrt{mv^2 - a^4}$

Aber $\sqrt{m v^2 - a^4} = m^{\frac{1}{2}} v - \frac{a^4 v^{-1}}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^8 v^{-3}}{8 m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{12} v^{-5}}{16 m^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$

Folgl. $2 y \sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{c dv}{a^2}\left(m^{\frac{1}{2}} m - \frac{a^4 v^{-1}}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^8 v^{-3}}{8 m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{12} v^{-5}}{16 m^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots \right)$

$= \frac{m^{\frac{1}{2}} c v dv}{a^2} - \frac{a^2 c v^{-1} dv}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^6 c v^{-3} dv}{8 m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{10} c v^{-5} dv}{16 m^{\frac{5}{2}}} ..$

$\times \pi \quad 2\pi y \sqrt{dy^2 + dv^2} = \pi\left(\frac{m^{\frac{1}{2}} c v dv}{a^2} - \frac{a^2 c v^{-1} dv}{m^{\frac{1}{2}}} \text{ \&c.} \right)$

Mann $S(2\pi \sqrt{dy^2 + dv^2}) = \pi\left(\frac{m^{\frac{1}{2}} c v^2}{2 a^2} - \frac{a^2 c \times Log. v}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^6 c}{16 m^{\frac{3}{2}} v^2} - \frac{a^{10} e}{64 m^{\frac{5}{2}} v^4} .. \right)$

Wenn man endlich für m seinen Werth $4(a^2 + c^2)$ sezt, wo demnach

$$m^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a^2 + c^2}$$

$$m^{\frac{3}{2}} = 8\sqrt{(a^2 + c^2)^3}$$

$$m^{\frac{5}{2}} = 32\sqrt{(a^2 + c^2)^5}$$ gielt, so erscheint die Reihe für die Oberfläche in dieser Gestalt:

$$\pi\left(\frac{c\,v^2\sqrt{a^2+c^2}}{a^2} - \frac{a^2\,Log.\,v}{2\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{a^6\,c}{128\,v^2\sqrt{(a^2+c^2)^3}} + \frac{a^{10}\,c}{2048\,v^4\sqrt{(a^2+c^2)^5}} \cdot\cdot\right)$$

§. 217. **Zusatz.** Hat der Afterkegel gleiche Achsen, so bekommen wir folgenden Ausdruck:

$$\pi\left(\frac{a\,v^2\sqrt{2\,a^2}}{a^2} - \frac{a^3\,Log.\,v}{2\sqrt{2\,a^2}} + \frac{a^7}{128\,v^2\sqrt{(2\,a^2)^3}} + \frac{a^{11}}{2048\,v^4\sqrt{(2\,a^2)^5}} \cdot\cdot\cdot\cdot\right)$$

§. 218.

$$= \pi\left(v^2\sqrt{2} - \frac{a^2\,Log.\,v}{2\sqrt{2}} + \frac{a^4}{512\,v^2\sqrt{2}} + \frac{a^6}{32768\,v^4\sqrt{2}} \cdot\cdot\cdot\cdot\right)$$

§. 218. **Anmerk.** Zu allerletzt noch ein Beyspiel. Die Kuppel eines gothischen Tempels, die eine gleichseitige Hyperloide vorstellt, soll mit Kupferblech gedeckt werden, wie viel wird man dazu Quadratfüsse nöthig haben, wenn die Kuppel in der Höhe 20, und in der untersten Weite 44 Schuhe hält?

Auflösung. Aus der gegebenen Abscisse und der Doppelordinate läßt sich gemäß der Gleichung $y^2 = ax + x^2$ die Achse sehr leicht bestimmen. Es ist nämlich

$$22^2 = a \times 20 + 20^2$$
$$484 = 20a + 400$$
$$400 \qquad\qquad 400$$

$$84 = 20a$$
$$:20 \quad 4\tfrac{1}{5} = a$$
$$\text{oder} \quad 4{,}2 = a$$

Weil nun $v = 20 + \frac{4{,}2}{2} = 20 + 2{,}1 = 22{,}1$ so wird die Reihe, da $\sqrt{2} = 1{,}414$ ist, für den besondern Fall so aussehen

$$3{,}14\left((22{,}1)^2 \times 1{,}414 - \frac{(4{,}2)^2 \times 1{,}3222}{2 \times 1{,}414} + \frac{(4{,}2)^4}{512 \times (21{,}1)^2 \times 1{,}414} \ldots\right)$$
$$3{,}14(690{,}61 - 23{,}32 \ldots = 3{,}14 \times 667{,}29$$
$$= 2095{,}29 \text{ Quadratschuhe.}$$

Von der umgekehrten Methode der Tangenten.

§. 219. **Erkl.** Man versteht unter dieser Methode die Lehre, aus einer gegebnen Tangente, Subtangente, Normal, Subnormal, Rektifikation, Quadratur, Kubatur, oder Oberflächen-

ausdruck irgend einer krumen Linie, die Kurve selbst, welcher so eine Tangente u. d. gl. zugehört, wieder daraus zu bestimmen.

§. 220. Zusatz. Die obige Benennung dieser Lehre ist daher nicht am besten angepaßt: man würde vielleicht treffender sagen: Die umgekehrte Methode des Differentialkalkuls in Hinsicht auf die krummen Linien.

§. 221. Aufgabe. Welcher Kurve kömmt die Subnormal $\frac{1}{2}a - x$ zu?

Auflösung. Man setze den gegebnen Ausdruck dem allgemeinen der Subnormal gleich, schicke die Gleichung zum Integrieren an, und suche für y^2 nach der Integration den entsprechenden Werth. Also

$$\frac{1}{2}a - x = \frac{y\,dy}{dx}$$

$$\times dx \qquad \frac{a\,dx}{2} - x\,dx = y\,dy$$

$$\text{Integ.} \qquad \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$$

$$\times 2 \qquad ax - x^2 = y^2$$

welche Gleichung für den Zirkel gehört; also ist der Zirkel allein jene Kurve, die die Subnormal $\frac{1}{2}a - x$ hat.

§. 222. Aufgabe. Welcher Kurve gehört die Quadratur $\frac{2}{3}x\sqrt{px}$ zu?

Auflösung. Man differenziere den gegebenen Ausdruck und setze ihn mit dem Flächenelement in eine Gleichung. Es ist aber

$$d\left(\frac{2}{3}\right.$$

$d(\frac{2}{3} x \sqrt{px}) = d(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$,

$= p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$

Also $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = y dx$

$:dx \quad p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$

quad. $px = y^2$ Folglich muß diese Linie eine Parabel seyn.

§. 223. Aufgabe. Wie heißt die krume Linie deren Subtangente beständig ist?

Auflösung. Es sey die beständige Größe $= p$, so ist

$$p = \frac{y dx}{dy}$$

$p dy = y dx$

$:dx \quad \frac{p dy}{dx} = y$ die Gleichung für die Logistik

§. 223. Aufgabe. Giebt es auch eine Kurve, deren Subnormal beständig ist?

Auflösung. Man setze die beständige Größe $= q$, so giebt dieß

$$q = \frac{y dy}{dx}$$

$\times dx \quad q dx = y dy$

Integ. $qx = \frac{y^2}{2}$

$\times 2 \quad 2qx = y^2$.

Ist nun $2q = p$, so wird

$px = y^2$ seyn.

Das heißt, die Linie ist die apollonische Parabel.

§. 224.

§. 224. **Aufgabe.** Wie müßte eine Linie von der Beschaffenheit konstruiert werden, daß die Subtangente so groß wäre als das Quadrat der Ordinate?

Auflösung.

$$\frac{y\,dx}{dy} = y^2$$

$$:y \qquad \frac{dx}{dy} = y$$

$$dx = y\,dy$$

Integ.

$$x = \frac{y^2}{2}$$

$$\times 2 \qquad 2x = y^2$$

Werden nun einige x nach Belieben angenommen, und zwischen ihnen und der Zahl 2 eben so viele mittlere Proportionalen gesucht, so erhält man Ordinaten einer solchen Linie.

§. 225. **Aufgabe.** Wie sieht die Kurve aus, wovon sich die Kubatur des aus ihr erzeugten Körpers durch $\pi\left(\frac{3ac^2x^2+2c^2x^3}{6a^2}\right)$ ausdrücken läßt?

Auflösung. Es ist

$$d\left(\pi\left(\frac{3ac^2x^2+2c^2x^3}{6a^2}\right)\right)$$

$$= \pi\left(\frac{6ac^2x\,dx+6c^2x^2\,dx}{6a^2}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{ac^2x\,dx+c^2x^2\,dx}{a^2}\right)$$

Folglich heißt die Gleichung

$$\pi y^2\,dx = \pi\left(\frac{ac^2x\,dx+c^2x^2\,dx}{a^2}\right)$$

$$:\pi$$

$$:\pi \quad y^2\,dx = \frac{a\,c^2\,x\,dx + c^2\,x^2\,dx}{a^2}$$

$$:dx \quad y^2 = \frac{a\,c^2\,x + c^2\,x^2}{a^2}$$

oder $y^2 = \frac{c^2\,x}{a} + \frac{c^2\,x^2}{a^2}$ welches die Hyperbeläquation ist, wenn statt dem Parameter die kleine Achse gebraucht wird.

§. 226. **Aufgabe.** Die Quadratur einer krummen Linie kann durch die unendliche Reihe $\frac{c\,v}{2} - \frac{c\,v^3}{3\,a^2} - \frac{c\,v^5}{5\,a^4} \ldots$ ausgedrückt werden; wie mag die Gleichung davon aussehen?

Auflös. Man differenziere allererst die Reihe

$$d\left(\frac{c\,v}{2} - \frac{c\,v^3}{3\,a^2} - \frac{c\,v^5}{5\,a^4} \ldots\right)$$

$$= \frac{c\,dv}{2} - \frac{3\,c\,v^2\,dv}{3\,a^2} - \frac{5\,c\,v^4\,dv}{5\,a^4} \ldots$$

$$= \frac{c\,dv}{2} - \frac{c\,v^2\,dv}{a^2} - \frac{c\,v^4\,dv}{a^4} \ldots$$

so entsteht die Gleichung

$$y\,dv = \frac{c\,dv}{2} - \frac{c\,v^2\,dv}{a^2} - \frac{c\,v^4\,dv}{a^4} \ldots$$

$$:dv \quad y = \frac{c}{2} - \frac{c\,v^2}{a^2} - \frac{c\,v^4}{a^4}$$

quad. $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2\,v^2}{a^2} - \frac{c^2\,v^4}{a^2} + \frac{c^2\,v^4}{a^4} \ldots$

also $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2\,v^2}{a^2}$ das heißt die Krume Linie ist die Ellipse.

§. 227.

Bayerische Staatsbibliothek München

§. 227. **Anmerk.** Indeß bleibt diese Art der umgekehrten Methode aus unendlichen Reihen die ursprüngliche Gleichung jener Linie, woraus sie abstammt, wieder zu entwickeln immerhin mühsam; ja es ist oft alles Bemühen fruchtlos, weil dabey Vortheile sollen angewendet werden, die bis daher noch nicht entdeckt sind.

§. 228. **Aufgabe.** Giebt es auch eine Linie deren Quadratur $\frac{1}{2}xy$ ist?

Auflösung. $d(\frac{1}{2}xy) = \frac{xdy + ydx}{2}$

Folglich $ydx = \frac{xdy + ydx}{2}$

$$:dx \qquad y = \frac{xdy}{2dx} + \frac{y}{2}$$

$$-\frac{y}{2} \qquad -\frac{y}{2}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{xdy}{2dx}$$

$$xy \qquad y = \frac{xdy}{dx},$$ und in eine Proportion aufgelöset, giebt

$y : x = dy : dx$. Es ist dieß demnach eine Linie, wo sich Abscisse und Ordinate wie ihre Differentialen verhalten, welches aber nur in geradlinichten Dreyecken möglich ist. Ein Beweis, daß sich diese Methode auch auf gerade Linien erstreckt.

§. 225. **Anmerk.** Nun träffe die Reihe noch die übrigen krumen Linien, z. B. Zikloide, Chonchoide, Cissoide u. d. gl., so auch die Artikel vom Krümmungsstralle, vom Wendepunkt der Kurven, von verschiednen Evoluten, von Linien doppelter Krümmung u. s. f. Weil wir uns aber vorzüglich auf die Regelschnitte einschränkten, und selbe auch wirklich etwas weitläuftig abhandelten, so wollen wir sie für dießmal weglassen. Vielleicht giebt es Gelegenheit, ihnen ein besonders Bändchen einzuräumen, wo wir dann mit selben mehr ins Detail gehen können, als es hier wegen Einschränkung des Raumes geschehen dorfte.

Es

Bayerische Staatsbibliothek München

Erste Tafel zur höhern Mathematik.

Fig. 1.

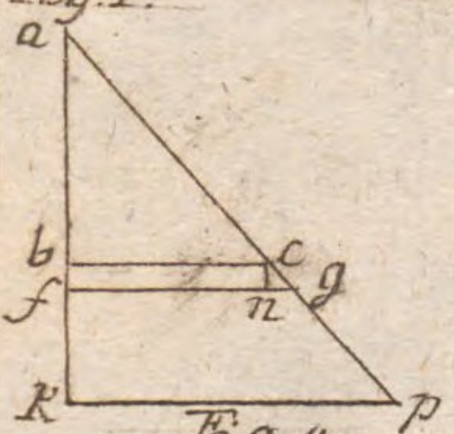


Fig. 2.

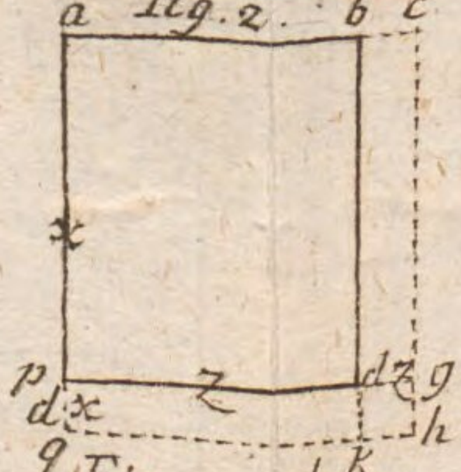


Fig. 3.

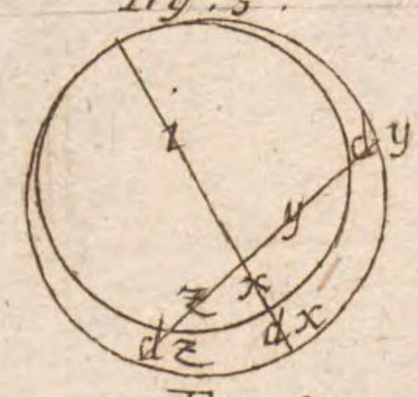


Fig. 4.

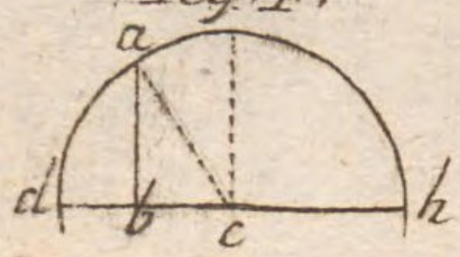


Fig. 5.

Fig. 6.

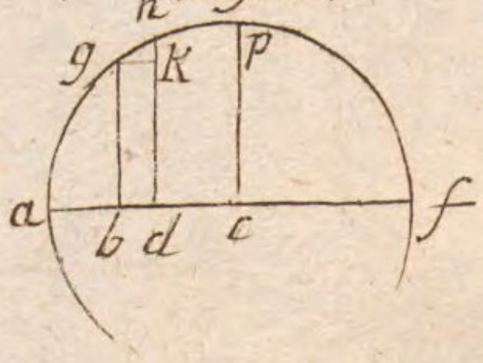


Fig. 7.

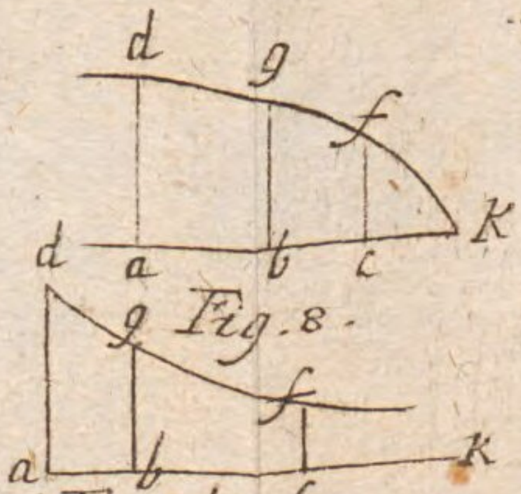


Fig. 8.

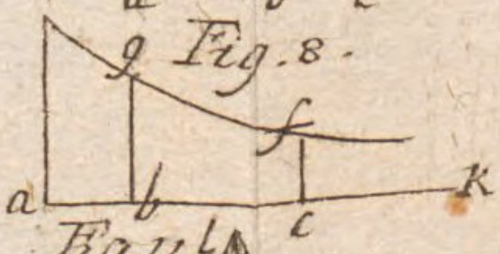


Fig. 9.

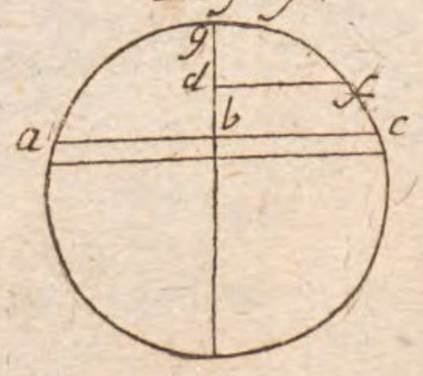


Fig. 10.

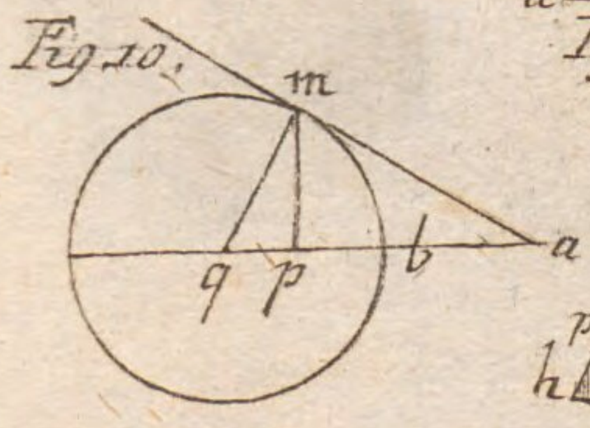


Fig. 11.

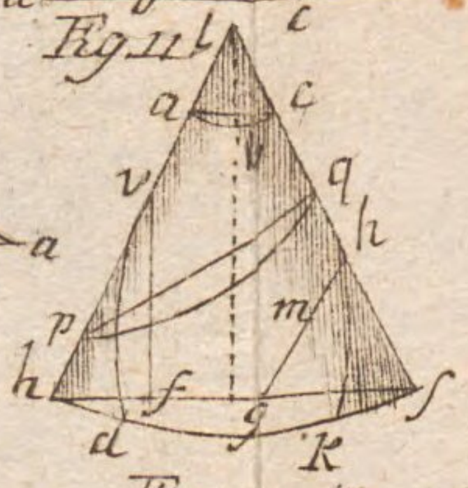


Fig. 12.

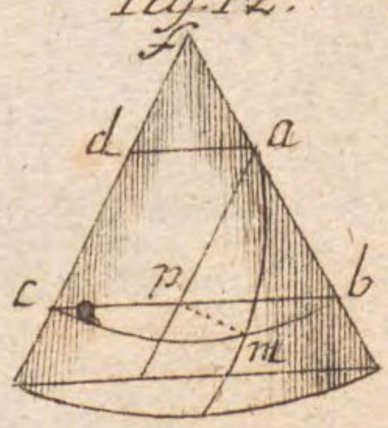


Fig. 13.

Fig. 14.

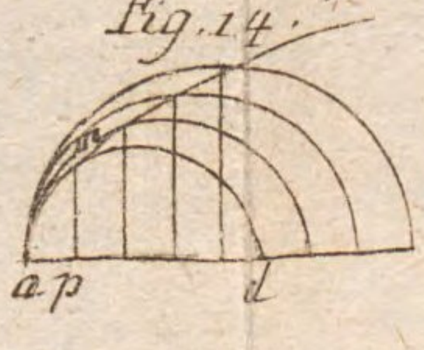


Fig. 15.

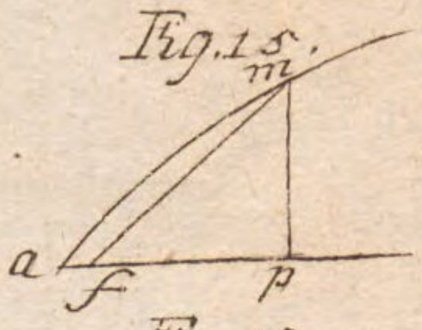
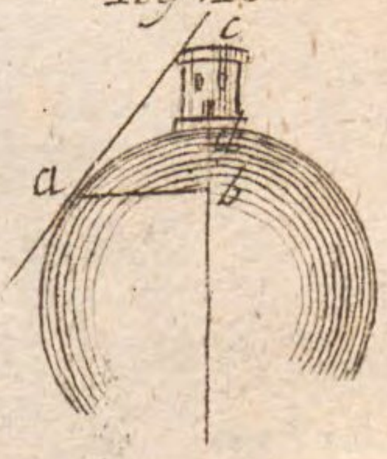


Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.



Zweite Tafel zur höhern Mathematik.

Fig. 19.

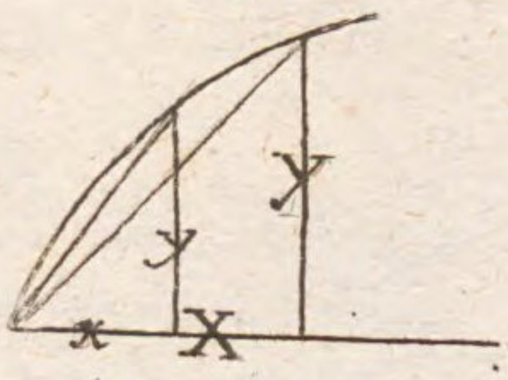


Fig. 20

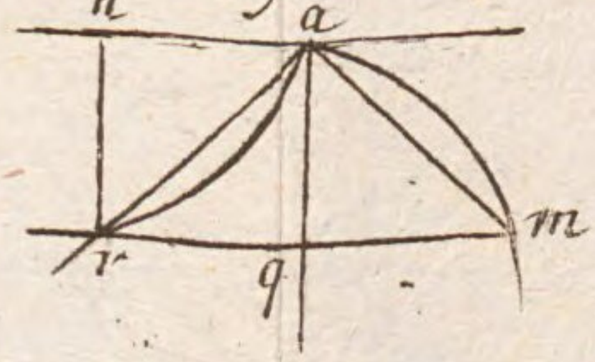


Fig. 21.

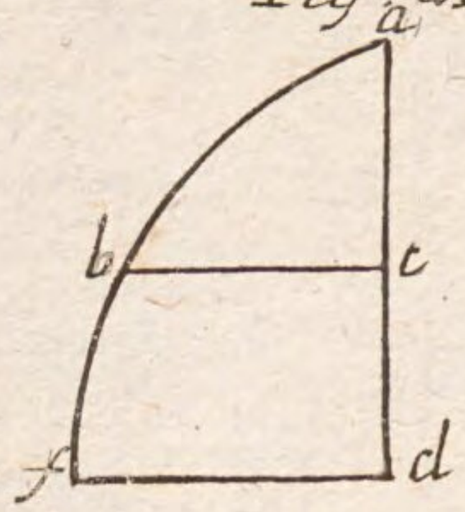


Fig. 22.

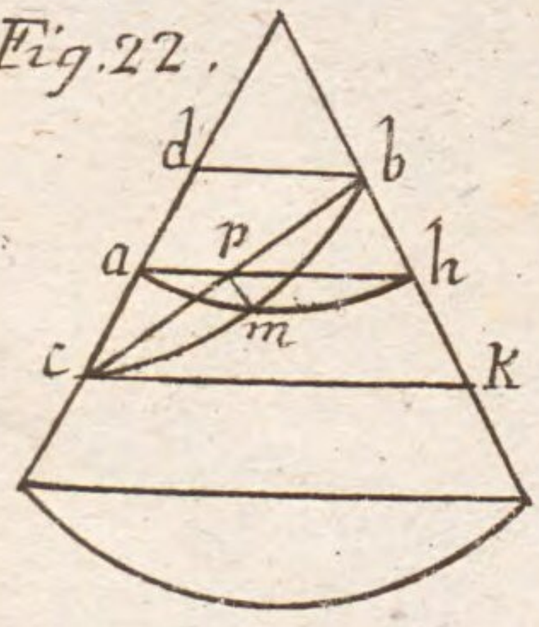


Fig. 23.

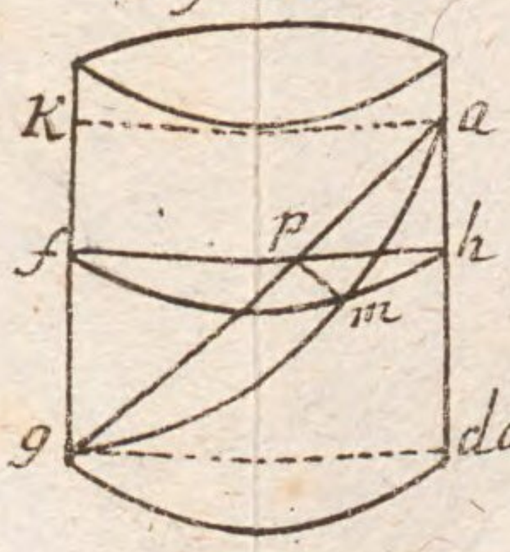


Fig. 24.

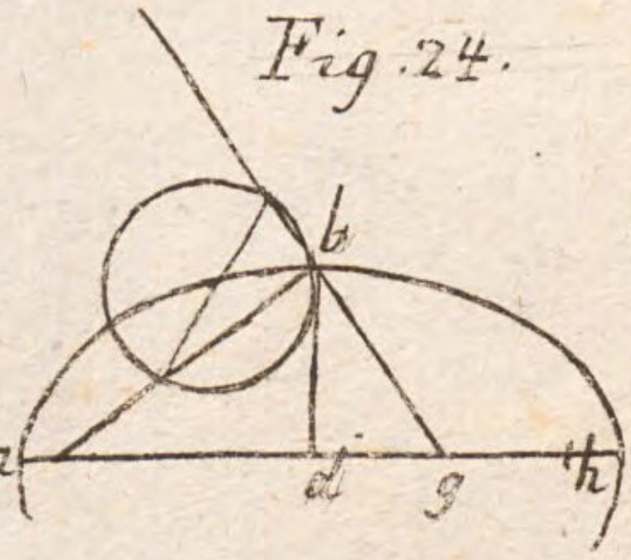


Fig. 25.

Fig. 26.

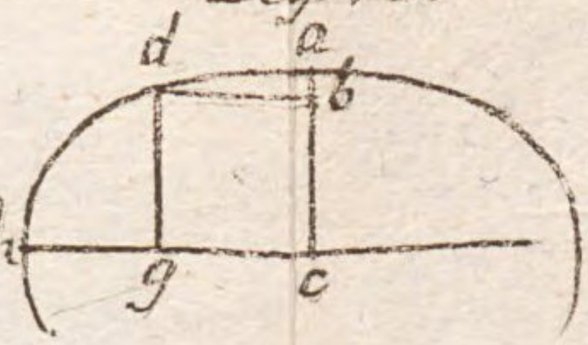


Fig. 27.

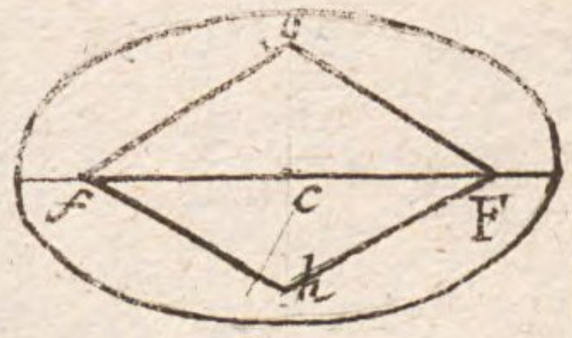


Fig. 28.

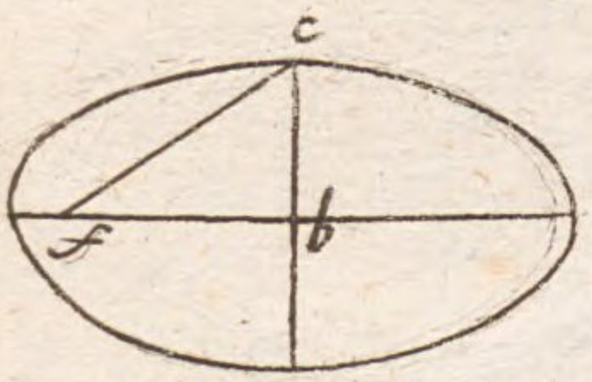


Fig. 29

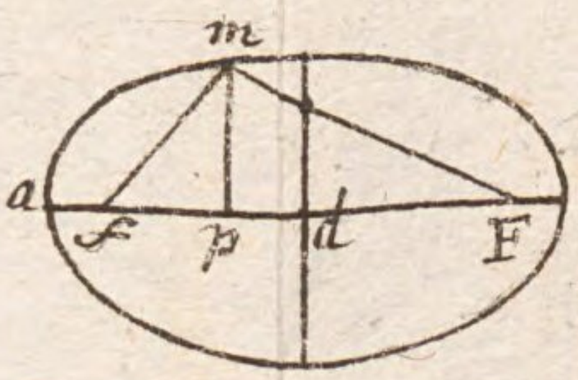


Fig. 30.

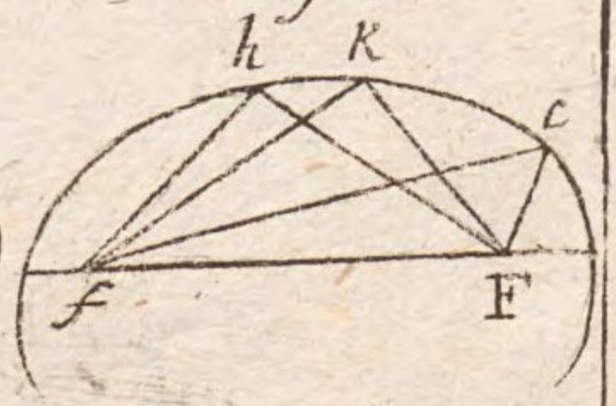


Fig. 32.

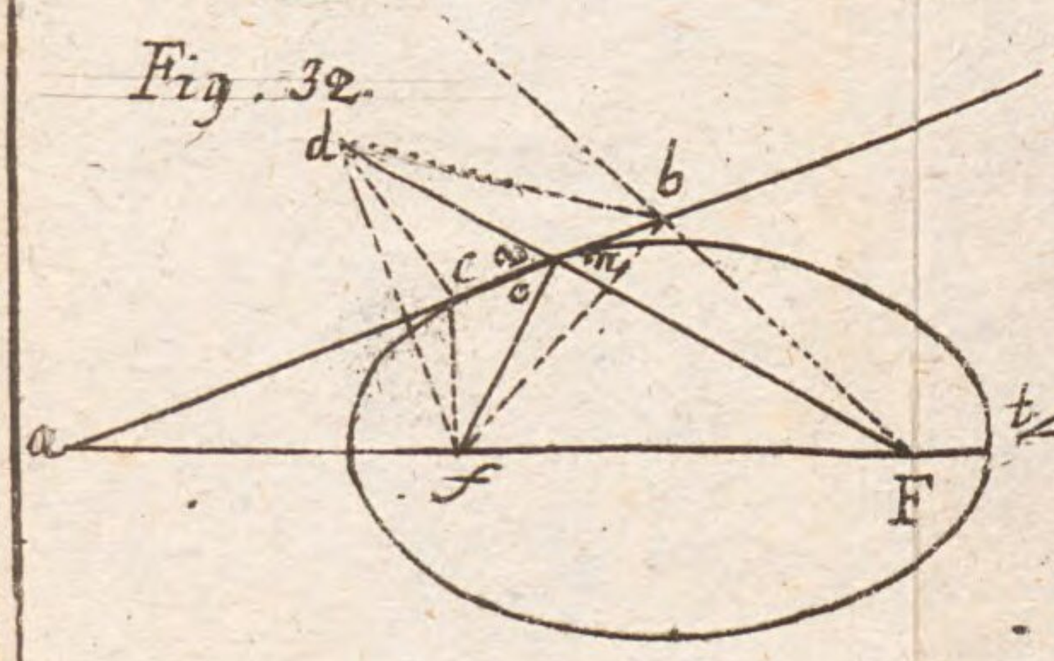
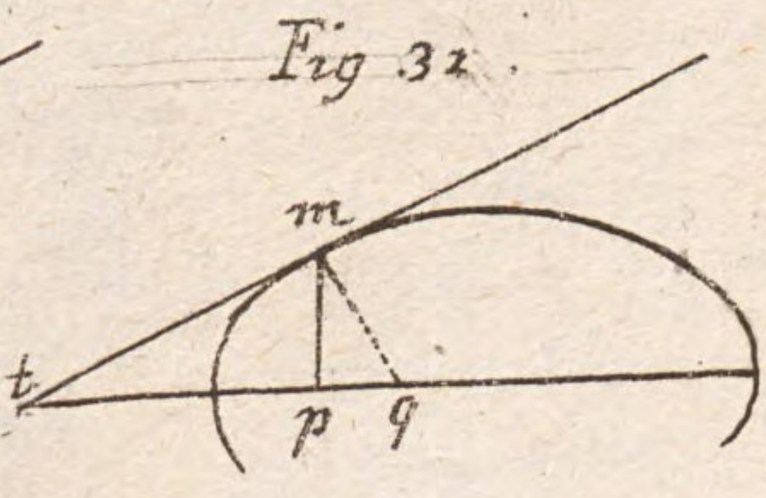


Fig. 31.



Dritte Tafel zur höhern Mathematik.

Fig. 33.

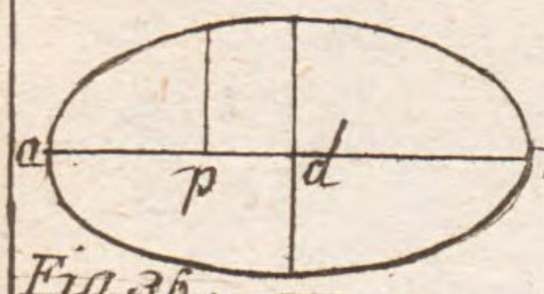


Fig. 34.

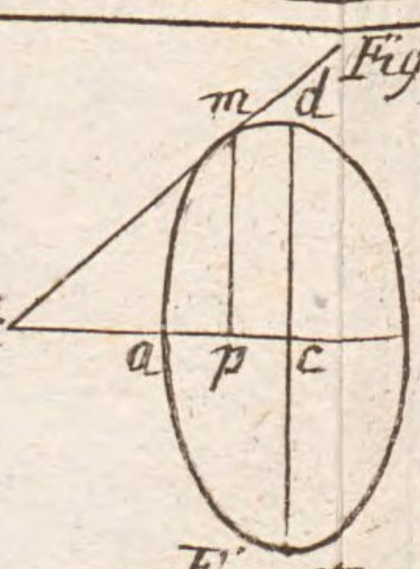


Fig. 35

Fig. 36.

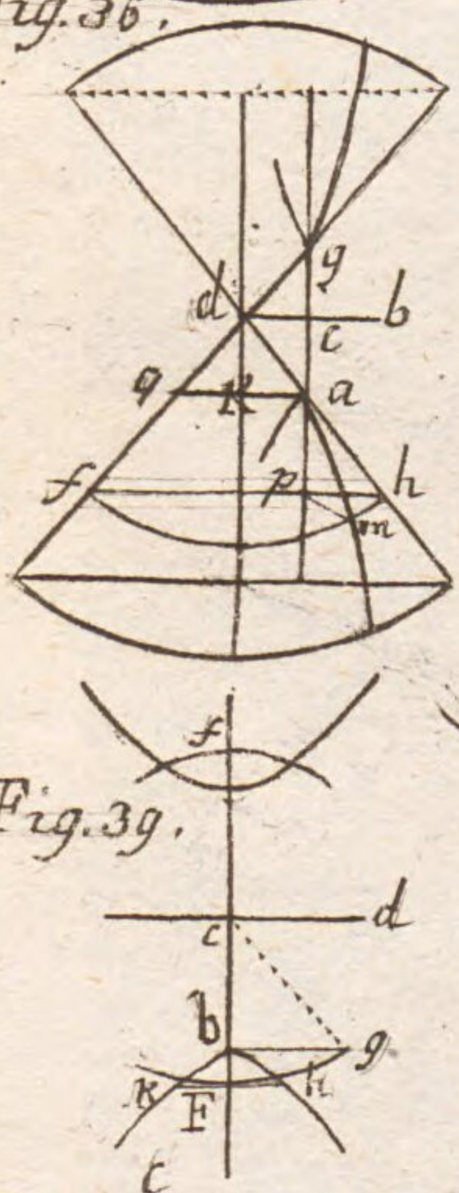


Fig. 37.

N II

Fig. 38

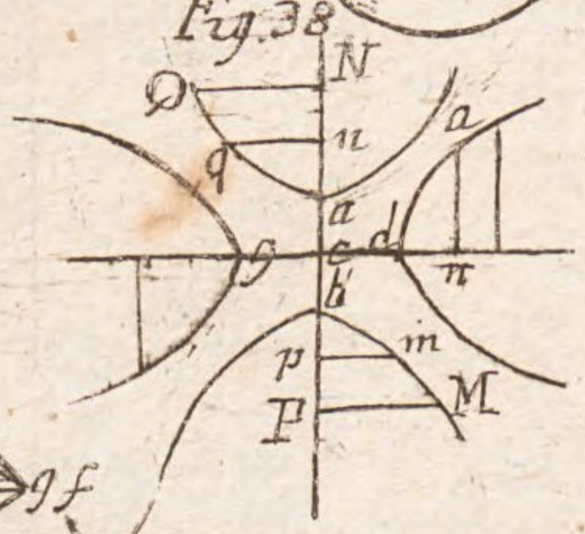


Fig. 39.

Fig. 40.

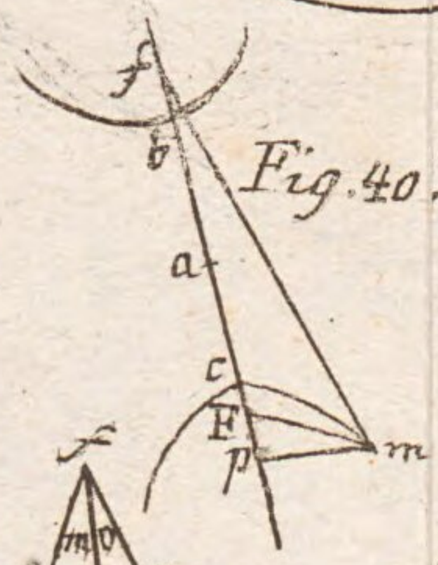


Fig. 41.

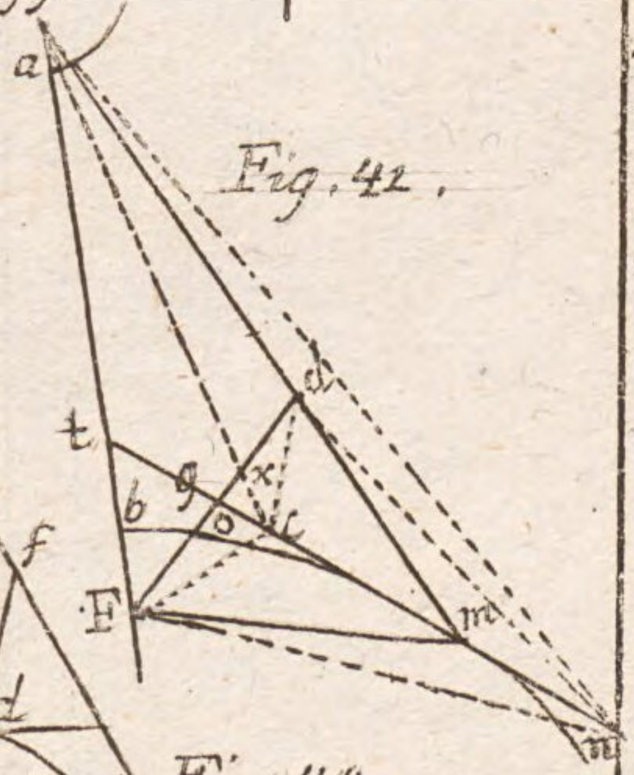


Fig. 42

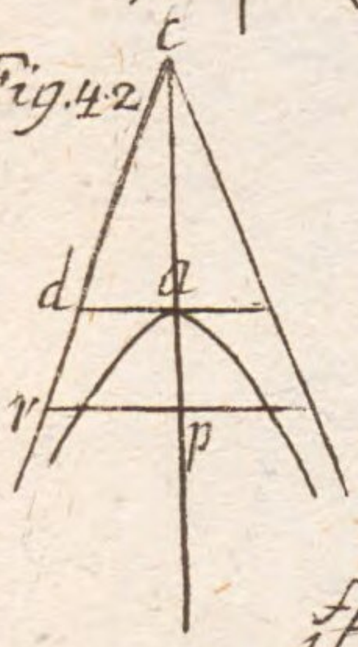


Fig. 43.

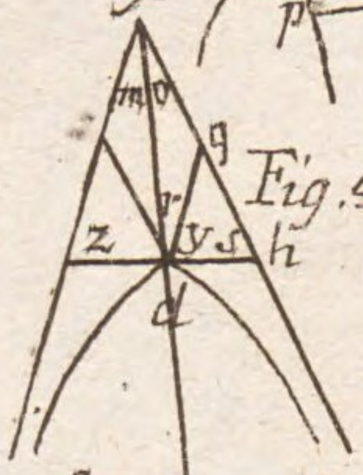


Fig. 44.

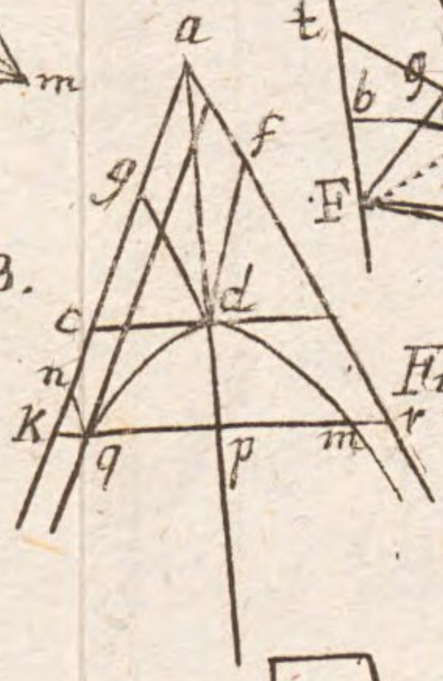


Fig. 45

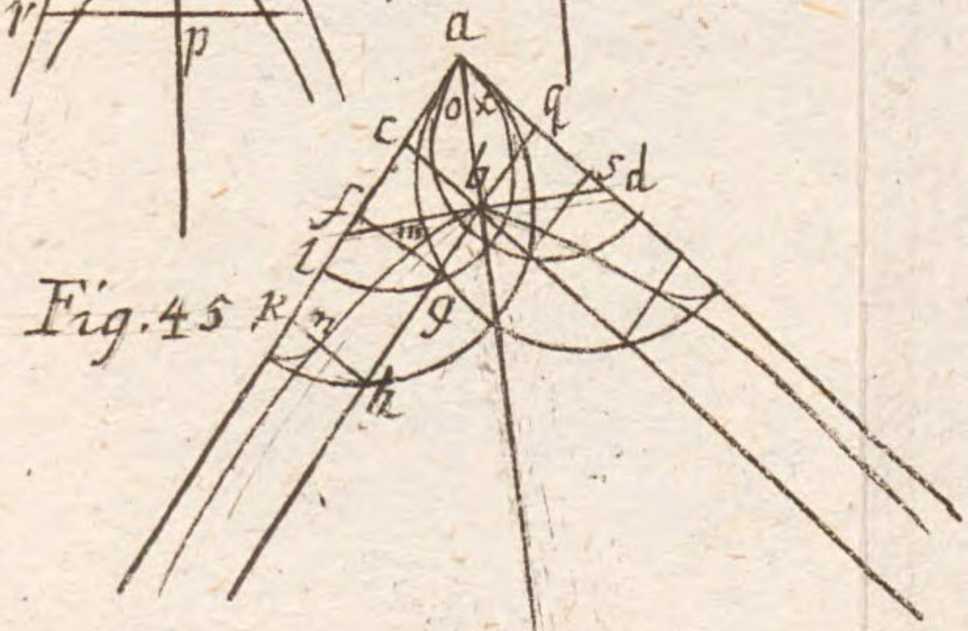
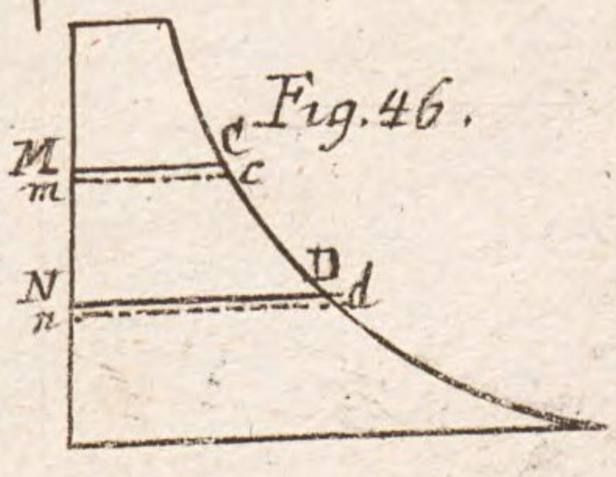


Fig. 46.



Geschichte der Kugeldreyeckslehre.

Astronomie, Geographie und zum Theil auch die Gnomonik waren die drey wichtigen Beschäftigungen der Menschen, welche die Kugeldreyeckslehre, oder wie sie sonst genennt wird, die sphärische Trigonometrie zu einem Hauptbedürfniße der nützenden Gelehrsamkeit gemacht haben. Es wird daher, denke ich, Niemand die Behauptung übertrieben finden, daß die sphärische Trigonometrie so alt, als die Astronomie selbst sey. Die Unternehmungen des Hyparchus in dieser Wissenschaft sowohl als in der Geographie, da er nach dem Zeugniße des Strabo der erste war, welcher die Lage der Oerter auf der Erde nach Länge und Breite bestimmte, fordern zu viele trigonometrische Rechnungen dieser Art, als daß sich etwas solches ganz ohne selben leisten ließe. Noch erstaunungswürdiger sind die astronomischen Arbeiten des Ptolomäus in seinem Almagest, welches so lange als das beste und wichtigste Werk in der Astronomie angesehen wurde. Freylich mögen damals die Lehrsätze dieser Wissenschaft noch in kein ordentliches System gebracht worden seyn, wie heut zu Tage; es mögen auch mehrere solche Sätze, theils ganz gemangelt, theils einer bessern Entwicklung bedürft haben. Indessen waren die Materialien zu

selben doch da. Wirklich hat dieß Geber, ein arabischer Astronom, welchen Snellius einen Oforem calculorum nennt, weil er, wie es heißt, weitläuftige Rechnungen gewaltig scheute, sattsam bewiesen. Er kommentierte über obengenannten Almageſt, und lieferte bald darauf eine kurze Abhandlung der sphärischen Trigonometrie, worinn er seine erfundnen Lehrsätze, rechtwinklichte Kugeldreyecke zu berechnen, mit unter vortrug. Zwar schrieb auch schon Menelaus von Alexandrien, der zu Ende des ersten Jahrhunderts lebte, und sich ebenfalls die Astronomie zum Lieblingsstudium machte, ein Werk in 3 Bänden von den sphärischen Triangeln, wo aber Gebers erfundne Lehrsätze noch nicht darinn zum Vorschein kommen, folglich kein so vollständiges Lehrgebäude seyn konnte.

Demohngeachtet hatte diese Wissenschaft gleiches Schicksal mit ihrer Schwester der ebnen Trigonometrie. Ihre Rechnungen waren erstaunlich weitläuftig und ermüdend, bis endlich mit Anfange des vorigen Jahrhunderts zur größten Wohlthat der gesammten Mathematik die Logarithmen erfunden wurden. Die Geschichte der Logarithmenerfindung, die ich am Ende meiner Geometrie kurz anführte, gehört also beyden Trigonometrien gemeinschaftlich.

Bis auf Nepern und Christian Wolfen erhielt übrigens die Kugeldreyeckslehre keine merklichen Verbesserungen oder erhebliche Zusätze, wie die übrigen Aeste der Mathematik. Ersterer erfand eine allgemeine Regel für sämmtliche Auflösungen rechtwinklichter Dreyecke: Wolf hingegen, obwohl er die ebne Trigonometrie unter allen seinen abgehandelten

delten Wissenschaften am unvollständigsten vortrug, bewies sich doch in der sphärischen noch glücklicher als Neper; denn seine Regel bezieht sich auch auf die schiefwinklichten Dreyecke. Es sind bey ihm alle Fälle, zween ausgenommen, wo nämlich aus den Seiten die Winkel und aus den Winkeln die Seiten bestimmt werden sollen, in dieser kurzen Formel enthalten: r × cos. m = sin s × sin S = cot a × cot A, wo r den Radius, m *partem mediam*, s und S *sejunctas*, a und A *adjacentes* bedeuten.

Noch glücklicher als Wolf war Lambert, welcher einen allgemeinen Beweis aller Regeln der sphärischen Trigonometrie und eben darum eine einzige allgemeine Regel ihrer Ausübung erfand. Herr Prof. Kies hat nach Klemms Zeugniß diese Lehre gleichfalls in einer akademischen Abhandlung 1758 sehr ausführlich und gründlich vorgetragen. Abt Häseler widmete diesem Theile der Mathematik in seinen Anfangsgründen einen eignen Band, und handelte ihn so vollständig und original ab, als vielleicht noch keiner oder wenige vor ihm gethan haben. Er hat darinn ein besonders Verdienst, daß man sein ganzes System ohne Figuren von Drath oder Pappendeckel und ohne mühsame Perspektivzeichnungen verstehen kann. Die wichtigsten Lehrsätze leitet dieser Mathematiker aus den Formelausdrücken der ebnen Trigonometrie her. Er weis auch dieses für Anfänger so trockne Studium am Ende durch eine leichte Anwendung auf die Astronomie und Geographie sehr angenehm und interessant zu machen.

Geschichte der höhern Mathematik.

Bedürfniß, wie bey der Elementargeometrie und den übrigen Zweigen der Matheſe, konnte es eigentlich nicht ſeyn, was die Erfindung der höhern Mathematik veranlaßte; ſo unentbehrlich ſie auch heut zu Tag in manchem Fache geworden iſt. Das Vergnügen eines raſtloſen Forſchgeiſtes, aus der reinſten Wahrheitsquelle, die nur in dem mathematiſchen Gebiete angetroffen werden kann, noch ferner und ferner zu ſchöpfen, däucht mir, wo nicht die einzige, doch die thätigſte Triebfeder, ſowohl der Erfindung, als der Erweiterung dieſer erhabnen Wiſſenſchaft geweſen zu ſeyn.

Die urſprünglichſten Spuren derſelben trift man ſchon in der Schule des Plato an, da man ihn ſelbſt für den erſten hält, welcher die Eigenſchaften der Kegelſchnitte ſeiner Unterſuchung würdig fand, und da die Entdeckung der für die Alten ſo wichtigen Wiſſenſchaft von den geometriſchen Oertern eine vorzügliche Frucht ſeiner Schule war.

Beyläufig 100 Jahre nach Plato ſtand Archimedes auf, der ſich hauptſächlich durch die Quadratur krummer Linien auszeichnete. Die Methode, mit der er zu Werke gieng, die Parabel zu quadrieren, ſcheint mir noch ſinnreicher zu ſeyn, als deſſen Erfindung des Verhältnißes der Kugel und des Zylinders in der Elementargeometrie.

Nun kömmt die Reihe an Appollonius Pergäus, welcher in der höhern Matheſe gerade das iſt, was Euklides, unter deſſen Nachfolger er gehört,

hört, in der Elementargeometrie war. Pergen in Pamphilien ist seine Vaterstadt und das Zeitalter desselben fallt etwa 40 Jahre nach Archimedes Flor. Zu Alexandrien studierte er die Mathematik, und gab hier auch 8 Bücher von den Kegelschnitten in griechischer Sprache heraus, worinn er alles zusammfaßte, was seine Vorgänger Aristes, Eudoxus, Menechmus, Euklides, Conon und Archimedes in diesem Fache geleistet hatten. Appollonius war der erste, welcher zeigte, daß man aus jedem Kegel alle drey Kurven erhalten könne; da man doch vorher irrig glaubte, die Parabel fodere einen rechtwinklichten, die Ellipse einen spitzwinklichten und die Hyperbel einen stumpfwinklichten Kegel. Es ist dieses Buch bis auf die Epoche der Analyse des Unendlichen die Normal der höhern Mathematik nach dem Beyspiele des Euklides in seiner Sphäre geblieben.

Man hatte aber anfänglich nur die vier ersten Bücher, und erst im vorigen Jahrhunderte fand Alphonsus Borelli bey seiner Reise durch Florenz das fünfte, sechste, und siebende Buch in einem arabischen Manuscripte, und gab sie in einer lateinischen Uebersetzung zu Rom 1661 in Folio heraus. Eben diese drey Bücher soll auch ein gewisser Jakob Golius in arabischer Sprache, beyläufig um die nämliche Zeit, aus Orient erhalten und ins Latein übersetzt haben. Das letzte Buch des Appollonius noch ausfindig zu machen, gaben die Gelehrten bereits alle Hofnung auf, bis endlich dem Edmund Halley, Prof. der Geom. zu Oxfort, zufälliger Weise in der bodlejanischen Bibliothek ein arabisches Manuscript in die Hände gerieth. Uebrigens sind diese Bücher äusserst abstrakt und dunkel

abge-

abgefaßt, und wir können sie itzt sehr wohl entbehren. Eine Menge Mathematiker haben in der Folge darüber kommentiert. Der erste unter denselben war **Pappus** von Alexandrien, welcher vor dem fünften Jahrhundert nach Kristus Geburt collectanea mathematica erscheinen ließ, wovon aber die ersten zwey Bücher nicht ganz mehr auf uns gekommen sind. Er gedenkt in selben des **Aristes**, eines griechischen Mathematikers, der der Liebling des **Euklides** war und ebenfalls Schriften über die höhere Geometrie herausgab. Auf **Pappus** folgt **Hypatia** die Tochter Theons, eine große Philosophin und Mathematikerin, deren trauriges Ende in der Blüthe ihrer Jahre zur Kirchengeschichte gehört, und in Zimmermanns Werke von der Einsamkeit ausführlich beschrieben ist. Im sechsten Jahrhunderte wagte sich Eutocius mit vielem Glücke über die Auseinandersetzung seiner Dogmen. Hier darf auch jener persische Gelehrte **Nassir Eddin** nicht vergessen werden, der eben so richtig über den **Appollonius** als den **Euklides** glossierte.

Nun traf der allgemeine tiefe Schlaf der Wissenschaften unter den Christen auch die höhere Mathematik, bis endlich zu Anfang des siebenzehnten Jahrhunderts durch **Leibnitz** in Deutschland, durch **Neuton** und **Wallis** in Brittanien, durch den **Descartes** und **Marquis de l'Hopital** in Frankreich, und endlich durch die **Bernoulle** in der Schweitz eine neue und ungleich glänzendere Epoche für die höhere Mathematik began. Hier ist die kennbarste Gränzlinie zwischen der alten und neuen Theorie derselben gezogen. Die Rechnung des Unendlichen welche von diesen Männern theils erfunden, theils

erwei-

erweitert, und zu einiger Vollkommenheit gebracht worden, hat so viel gemeinnütziges, so viel erhabenes, so viel göttliches, daß sie die Erfindungen der Alten in diesen Stücke, wie der Sonnenglanz die schwachblinkenden Sterne verdunkelt. Isaak Barrow, der Lehrer des großen Neutons, welcher in der Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts zu Cambridge und Gresham als Professor der Mathematik glänzte, gab unstreitig den Ton dazu an. Er war der Erfinder des sogenannten *Trianguli characteristici*, und bezeichnete die Differentialen der Ordinate und Abscisse d y und d x durch a und e. Wink genug für seinen Nachfolger Neuton, und für seinen deutschen Freund und Korrespondenten Leibnitz, welche gleich große, erfinderische Köpfe waren, die entdeckte Spur zu verfolgen, und zum nämlichen Ziel auf verschiednen Wegen zu gelangen.

Die Engländer nennen die Rechnung des Unendlichen mit ihrem Neuton Fluxionenrechnung, und wir Deutsche heißen sie mit unserm Leibnitz Differentialrechnung. Jene bezeichnen eine Fluxion d. i. ein Differential von x oder y durch x· und y·; wir hingegen durch d x und d y. Im Grunde ist demnach die Sache einerley, man mag es so oder so nennen, so oder so bezeichnen; weil doch am Ende die übrige Verfahrungsart und das Resultat das nämliche bleibt.

Ehedem stritt sich die deutsche Parthey heftig und lange mit den Britten, ob Leibnitz oder Neuton der wahre Erfinder der Differentialrechnung war. Die Geschichte hievon steht sehr umständlich in der leibnitzischen Biographie des Chevalier de Jaucourt, so auch in des Montucla's Histoire des

Mathe-

Mathematiques. Der Bescheid endlich dieses langwierigen Streites fiel endlich dahin aus, daß es sehr wohl möglich sey, daß zwey gleich starke Genie's bey ein und der nämlichen Veranlassung auch auf die nämliche Erfindung gerathen. Der sel. Hr. Prof. Böhm, welcher die mathematischen Artikel für die deutsche Enciklopedie geliefert, drückt sich bey dieser Gelegenheit so aus: „Der durchdringende „Geist Leibnitzens, vor (für) den nichts zu hoch „war, seine Aufrichtigkeit, womit er bey jeder an„dern Gelegenheit diejenige genennt, die ihn auf „die Spur gebracht, die Menge und Wichtigkeit „seiner andern Erfindungen, die seinen Namen auch „ohne die Entdeckung der Differentialrechnung ewig „ehrwürdig gemacht, und der von den neutonischen „ganz verschiedne Grund, worauf er sene Rechnung „gebaut, würden allein hinreichende Bürgen davon „seyn, daß er sie Neutonen nicht abgeborget, wenn „ihn auch letzterer nicht selbst in der Anmerkung zum „zweyten Lehrsatze des andern Buchs seiner princi„piorum (S. 226. der Ausgabe Amsterdam 1723) „davon freyspräche, indem er sagt: Als ich den „berühmten Mathematiker G. W. Leibnitz, mit „dem ich vor 10 Jahren in Briefwechsel gestan„den, bekannt machte, daß ich eine Methode „besitze, die größten und kleinsten Größen zu „bestimmen, die Tangenten zu ziehen u. s. f. „und durch Versetzung der Buchstaben die Auf„gabe, worauf es ankam (data aequatione quot„cunque fluentes quantitates inuoluente fluxiones „inuenire, et vice versa) ihm verborgen vorlegte, „antwortete er mir, daß er gleichfalls auf eine „solche Methode verfallen sey, und theilte mir „die seinige mit, welche mit der meinigen fast

ganz-

„gänzlich übereinkömmt, und nur in den Benen„nungen, Bezeichnungen, und in der Vorstellung „von der Weise, wie die Größen entstehen, da„von abweichet.“ Zeugniß genug, denke ich, daß Leibnitz eben so gut, als Neuton Erfinder dieser für die Mathematik so äusserst wohlthätigen Entdeckung war.

Indeß hatten beyde ihre Nebenbuhler, welche, wo nicht an der Erfindung, doch an dessen Vervollkommnung keinen geringen Antheil nahmen. Jakob Gregori, ein Schottländer, der 1664 ein Werk de vera Circuli et hyperbolae quadratura (versteht sich durch Approximation) herausgab, wetteiferte in der Anwendung der Analyse des Unendlichen, wie dieß in seinem Buche (Exercitationes geometricae) sattsam erhellet, so ziemlich mit Neuton. Johann Wallis, Prof. der Geom. zu Oxfort, erleichterte diese Rechnung dadurch ungemein, daß er die Brüche, deren Nenner Würden sind, durch ganze Größen mit negativen Exponenten auszudrücken erfand. Gilee Persone de Roberval, Prof. der Mathematik auf den Kollegium Gervais, erfand eine Methode Kurven zu quadrieren und deren Tangenten zu ziehen, die in ihren Begriffen und Ausdrücken viel ähnliches mit der Fluxionenrechnung des Neutons hat, und so von andern zu reden.

Kaum war aber die Fehde wegen dem rechtmäßigen Erfinder zu Anfange des 18ten Jahrhunderts geendet, so fieng man an, die Richtigkeit dieses Kalkuls in Zweifel zu ziehen, und förmlich anzustreiten. Unter mehrern andern fiel es auch dem Abt Catelan ein, ihn als eine unnütze Methode auszuzischen. Nieuwentyt und Rolle behaupteten

hartnäckig, die Differentialrechnung wäre irrig, und beruhe auf falschen Gründen.

Aber diese Feinde der guten Sache fanden Widerleger, denen sie nicht gewachsen waren. Den ersten besiegte Marquis de l'Hopital, den zweyten Leibnitz selbst, Bernoulli und Herman; Rolles Kontroverse endlich wurde durch Varignon und Saurin hinlänglich entkräftet. Umständlicher läßt sich diese Streitgeschichte mehrmals in oben angeführtem Montucla lesen.

Leibnitz, der größte Geist, den je Deutschland hervorgebracht, verdient es, daß wir uns mit selben etwas umständlicher bekannt machen. Er wurde zu Leipzig 1646 den 3ten July gebohren. Sein Vater war Professor der Sittenlehre und Aktuarius der dasigen hohen Schule. Schon im fünfzehnten Jahre betrat er die akademische Bahn. Thomasius wurde sein Lehrer in der Weltweisheit, und Kuhnius in der Größenlehre. So befangen die Kenntnisse dieses Mannes waren, und so unangenehm dessen Vortrag noch nebenher ausfiel, so konnten doch diese ungünstigen Umstände die natürliche Neigung Leibnitzens nicht ersticken. Nach zwey Jahren reisete er nach Jena ab, wo ihm nun das Glück an den berühmten Weigel einen bessern Lehrer schenkte. Er verlegte sich hier auch auf die Rechtsgelehrsamkeit, und brachte es so weit, daß man ihm 1666 zu Altorf neben der Doktorswürde auch noch eine ausserordentliche Professur der Rechte antrug. Hier wurde Leibnitz mit einen gewissen Herrn von Boineburg bekannt, welcher ihn beym Churfürsten zu Mainz empfahl, wo er auch wirklich 1669 churfl.

Mainzischer Revision- und Kanzley-Kammerrath wurde. Weil nun Hr. von Boineburg entschlossen war, seinen Sohn in Paris studieren zu lassen, so wurde Leibnitz mit selbem dahin geschickt. In Paris erfand er eine Rechenmaschine, die der Akademie und dem Minister Kolbert so sehr gefiel, daß sie ihn als ein besoldetes Mitglied aufzunehmen versprachen, wofern er die römische Religion annehmen wollte; welches er aber ausschlug, und bald nachher, weil Hr. von Boineburg gestorben war, nach London reisete. Dort wurde Leibnitz mit Boyle, Wallis, Gregori, Barrow und mit seinem Rival dem Neuton bekannt. Als nun auch der Churfürst von Mainz mit Tod abgieng, kehrte er wieder nach Paris, wo er sich noch 15 Monate aufhielt. Nach Verlauf dieser Zeit unternahm er auch eine Reise durch Franken, Baiern, Schwaben, Oesterreich und Italien vor. Im Jahre 1699 wurde er von der Akademie zu Paris als auswärtiges Mitglied aufgenommen, und bald darauf ward er auch zu Berlin als Direktor der neu errichteten Akademie ernennt. Beyläufig 12 Jahre nachher beschenkte ihn Czaar Peter, der Erste, mit der Würde eines Justitzrathes, und einem jährlichen Gehalt von 1000 Rubel. Endlich starb Leibnitz 1716 in einem Alter von 70 Jahren, und hinterließ den Ruhm eines der größten Mathematiker, Naturkündiger, Chimiker, Dichter und Sprachforscher, so, daß Deutschland ewig auf ihn stolz seyn wird.

Seither bedienen sich nun die Mathematiker dieser Infinitesimalrechnung mit dem glücklichsten Erfolge. Selbst in der Physik werden dadurch die schwersten und nützlichsten Probleme mit erstaunlich

leichter Mühe aufgelöset. Johann Bernoulli, Clairaut d'Alembert, Daniel Bernoulli, Maclaurin, Euler, und vorzüglich Käſtner haben ſie zu jener Vollkommenheit gebracht, in welcher ſie dermalen blühet. Man darf wahrhaft zweifeln, wenn man den engen Raum unſrer Lebenstäge, und die Menge anderer Wiſſenſchaften, die einen nahmhaften Bezug auf die ausübende Mathematik haben, beherziget, ob dieſes Studium noch höher könne getrieben werden, als es wirklich geſchehen iſt.

Ich kann nicht umhin, unter den großen Beförderu dieſer tiefſinnigen Wiſſenſchaft auch ein Frauenzimmer unſers Jahrhunderts anzuführen, welches um ſo mehr bewundert zu werden verdient, je weniger man vom ſchönen Geſchlechte Perſonen zählt, die für ernſte Studien eingenommen wären. Sie iſt eine Mayländerinn, mit Namen Maria Gantana Agneſi. Von ihrem männlichen Genie kann man ſich dadurch leicht einen Vorbegriff machen, wenn man bedenkt, daß ſie neben ihrer Mutterſprache noch vier andere Sprachen redete; daß ſie in ihrem neunten Jahre ſchon eine eigen ausgearbeitete lateiniſche Abhandlung vorlas; daß ſie die Geometrie des Euklides, die Algebra, die Phyſik und Methaphyſik, überhaupt die ganze Philoſophie ſtudierte, und daß ſie endlich einen ſehr brauchbaren Kommentar über des Marquis de l'Hopital Abhandlung von den Kegelſchnitten ſchrieb. Den ausgezeichneſten Ruhm aber erwarb ſie ſich durch ihr großes Werk über die Analyſis des Unendlichen, welches ſie im 30ſten Jahre ihres Alters in zween Quartbänden unter dem Titel herausgab: Inſtituzione analitiche, ad vſo della Giouentu Italiana di

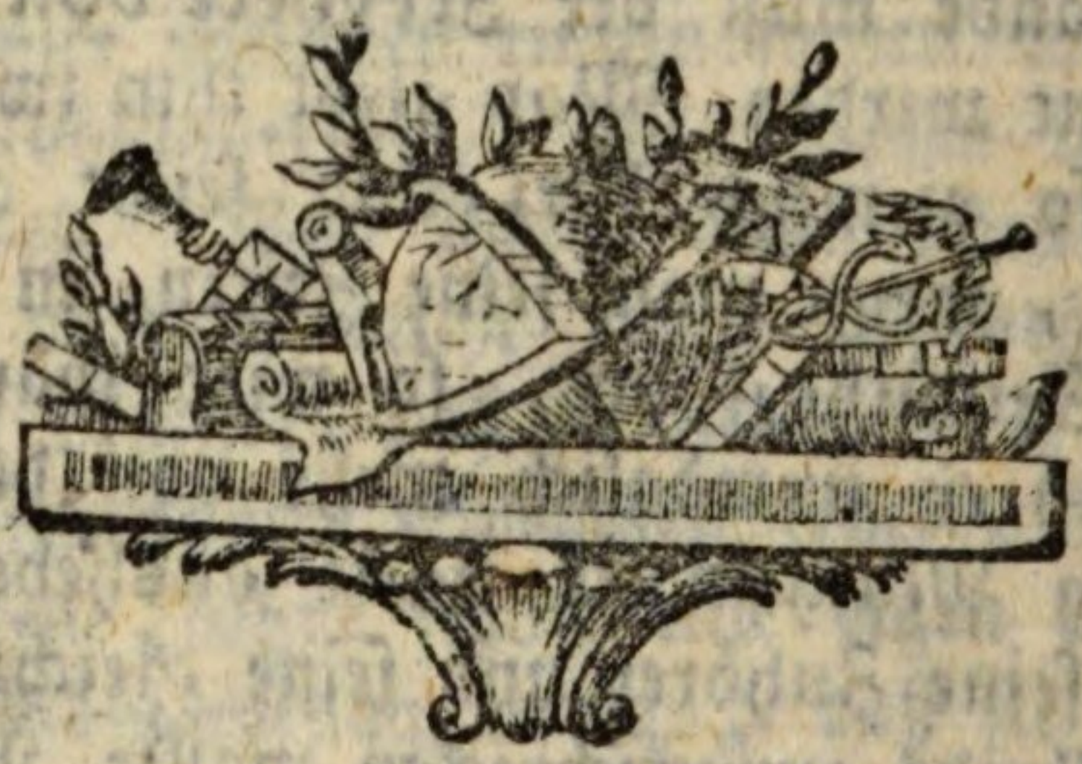
Donna Maria Gaetana Agnesi, Milanense, dell' Academia delle Scienze di Bologna 1748. Die Pariserakademie bezeugte ihr öffentlich, „es herrsche „Ordnung, Deutlichkeit und Kürze in allen Theilen desselben; es sey noch in keiner Sprache eine „Anleitung zur Analyse erschienen, die so geschwinde „und so tief in das Innere dieser Wissenschaft „führe: sie (die Akademie) sehe daher diese Schrift „der Agnesi für die vollkommenste und beste in „ihrer Art an." Zwey Jahre nachher bekam sie wirklich zu Bologna eine Professur aus der Mathematik, welche sie aber kaum ein Jahr bekleidete, indem sie beschloß, nach damaliger Sitte ihre übrigen Tage in einem Kloster zu verleben.

Unter den Verbreitern der Differentialrechnung im Deutschlande muß der Freyherr von Wolf am ersten genannt werden. Man giebt ihm zwar Schuld, daß er sie so ziemlich kurz und seicht abgehandelt habe; allein, wenn man seine Zeiten, in welcher er lebte, zu Gemüthe führt, so wird man bald begreifen, daß er unmöglich mehr von der theoretischen höhern Mathematik hätte ausheben können, wenn er je seine Zuhörer und seine gleichzeitigen Leser nicht vollends zurückschrecken wollte. Wolfs Verdienst um die Mathematik bleibt demnach trotz allen Einwendungen seiner Gegner nichts destoweniger immer groß; weil er in Rücksicht seiner Lage doch das leistete, was er leisten konnte.

Von den übrigen Lehrbüchern der höhern Geometrie verdient neben den bekannten des Segners, la Cailles, Karstens und Kästners, welcher letzterer freylich für Einstudierte das beste geliefert, wegen ihrer

Voll-

Vollständigkeit und Anwendung fürs Praktische de la Chapelle, und der öfter erwähnte Abt Häseler, angerühmt zu werden. Schade, daß keiner von der Analyse dabey einen Gebrauch gemacht. Letzterer gab zwar das Wort, noch einen fünften Band zu liefern, in welchem er die Differentialrechnung eben so ausführlich und deutlich vorzutragen verspricht, als es in den 4 ersten Bänden geschehen; worauf ich mich nnd jeder Liebhaber der Deutlichkeit und Vollständigkeit nicht anders als sehnlichst freuen kann und muß.



Mit Franzischen Schriften.

Berichtigungen.

Seite	Linie	statt	lies
8	12	einer solchen Ord- nung	einer solchen Größe der ersten Ordnung
9	11	: ∞	X a
21	16	um 900	nun 900
19	1	$x^2 (xv - yz)$	$x^2 d (xv - yz)$
29	4	$\frac{3mz}{a} - \frac{3my^2}{a^2}$: &c.	$\frac{3mz}{a} - \frac{3mz^2}{2a^2} - \frac{3mz^3}{3a^2} + \frac{3mz^3}{a^3}$ &c. $- \frac{3mz^4}{4a^2} - \frac{3mz^5}{5a^5}$ ...
42	6	seine Abscisse	ihre Abscisse
43	25	Subtangente	Subnormal
64	17	a	p
95	26: 2	$\frac{c^2}{2} : \frac{a^2}{2} =$ &c.	: 4 $\frac{c^2}{4} : \frac{a^2}{4} =$ &c.
106	15	Fig. 31	Fig. 32
110	9	32	34

4.25.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Prändel, Johann Georg,

Arithmetik Ins Kurze gefaßt

München 1796

Math.p. 437
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082605-6
VD18 15308413-001